Série A, N° 3.889
N° d'ordre :
4.740

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

PIERRE PIGEAUD

1re THÈSE. — " Contribution à l'étude des approximations en théorie unitaire pentadimensionnelle de Jordan-Thiry ".

2e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 23 MAI 1962 devant la Commission d'examen.

MM. LICHNEROWICZ, Président.
DENY,
THIRY, } Examinateurs.

Série A, N° 3.889
N° d'ordre :
4.740

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

PIERRE PIGEAUD

1re THÈSE. — " Contribution à l'étude des approximations en théorie unitaire pentadimensionnelle de Jordan-Thiry ".

2e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le devant la Commission d'examen.

MM. LICHNEROWICZ, Président.
DENY,
THIRY, } Examinateurs.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Janvier 1962

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen ..... M. ZAMANSKY

G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure
DE BROGLIE	T	Théories physiques
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées
GRASSÉ	T	Evolution des êtres organisés
PREVOST	T	Chimie organique
CHAUDRON	T	Chimie appliquée
WYART	T	Minéralogie et Cristallographie
TEISSIER	T	Zoologie
MANGENOT	T	Biologie Vég. (ORSAY)
AUGER	T	Physique quantique et Relativité
MONNIER	T	Physiologie Générale
PIVETEAU	T	Paléontologie
ROCARD	T	Physique (E.N.S.)
CARTAN	T	Mathématiques (E.N.S.)
LAFFITTE	T	Chimie générale
FAVARD	T	Géométrie supérieure
COULOMB	T	Physique du Globe
Mle COUSIN	T	Biologie Animale (S.P.C.N.)
CHRETIEN	T	Chimie minérale
DRACH	T	Zoologie
KASTLER	T	Physique (E.N.S.)
EPHRUSSI	T	Génétique
RIVIÈRE	T	Géologie S.P.C.N .et sédim.
GAUTHERET	T	Biologie Vég. (P.C.B.)
LUCAS R.	T	Recherches Physiques
THOMAS A.	T	Biologie cellulaire
ARNULF	T	Optique appliquée
MORAND	T	Physique Enseignement
SOLEILLET	T	Physique (P.C.B.)
FORTIER	T	Mécanique exp. des Fluides
DANJON	T	Astronomie
PETIT	T	Biologie maritime
QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique
GALLIEN	T	Embryologie
EICHHORN	T	Botanique
De CUGNAC	T	Biologie Végétale (S.P.C.N.)
Mle CAUCHOIS	T	Chimie Physique
THELLIER	T	Physique du Globe
L'HERITIER	T	Biologie Générale (ORSAY)
GRIVET	T	Radioélectricité (ORSAY)
PONCIN	T	Mécanique Générale
DUBREIL	T	Arithmétique et théorie des Nombres
QUELET	T	Chimie Organique
CAGNIARD	T	Géophysique appliquée
CHAMPETIER	T	Chimie macromoléculaire
CUVILLIER	T	Micropaléontologie
JUNG	T	Pétrographie
TRILLAT	T	Microscopie et diffraction électronique
WIEMANN	T	Chimie organique et struc.
JACQUINOT	T	Spectroscopie et phys. céleste (ORSAY)
VASSY	T	Physique de l'atmosphère
DESTOUCHES	T	Théories Physiques
AMIEL	T	Chimie générale
HOCART	T	Minéralogie et Cristallog.
J.P. MATHIEU	T	Physique (Optique)
COUTEAUX	T	Biologie animale (P.C.B.)
MAY	T	Zoologie (ORSAY)
CHOQUET	T	Théorie des fonctions et Topologie
FELDMANN	T	Biologie Végétale marine
GUINIER	T	Physique des Solides (ORSAY)
JOST	T	Physiologie comparée
FORTET	T	Calcul des Probabilités et Physique mathématique
SCHWARTZ	T	Calcul diff. et Intégral
CHOUARD	T	Physiologie Végétale
MALAVARD	T	Aviation (Techn. Aéronaut.)
BRELOT	T	Calcul diff. et intégral
NORMANT	T	Synthèse organique générale
BENARD	T	Chimie Minérale
BUVAT	T	Botanique (E.N.S.)
DUGUÉ	T	Statistiques Mathématiques
SOULAIRAC	T	Psychophysiologie
ULRICH	T	Physiologie Végétale
MARECHAL	T	Optique théorique et Appl.
KIRRMANN	T	Théories Chimiques
CHADEFAUD	T	Botanique
Mle LE BRETON	T	Physiologie de la nutri.
SALEM	T	Mathématiques générales
LELONG	T	Applic. de l'analyse à la géométrie
DEVILLERS	T	Anatomie et Histologie Comp.
EHRESMANN	T	Topologie Algébrique
FRANÇON	T	Physique (S.P.C.N.)
GLANGEAUD	T	Géographie physique et Géologie dynamique
GODEMENT	T	Mathématiques (M.P.C.)
PISOT	T	Techn. Mathém. de la Phys.
ROCH	T	Géologie
SCHATZMAN	T	Astrophysique
TERMIER	T	Paléontologie stratig.
ZAMANSKY	T	Mathématiques générales
LENNUIER	T	Physique (M.G.P.)
RIZET	T	Génétique (ORSAY)
ROUTHIER	T	Géologie appliquée
Mme TONNELAT	T	Physique Théorique
DIXMIER	T	Mathématiques (M.P.C.)
SOUCHAY	T	Chimie générale
AIGRAIN	T	Electrotechnique générale
BRUSSET	T	Chimie systématique
M. LEVY	T	Physique théorique des hautes énergies (ORSAY)
Mme CHAIX	T	Chimie biologique
Mme HUREL-PY		Biologie Végétale (P.C.B.)
PIAUX	T	Chimie (M.P.C.)
BRUN	T	Mécan. théorique des Fluides
LEDERER	T	Chimie biologique
Mme DUBREIL	T	Mathém. (Agrégation)
Mme LELONG	T	Mathématiques (E.N.S.)
BELLAIR	T	Géologie (S.P.C.N.)
COTTE	T	Physique électricité
DUBOIS J. E.	T	Chimie organique

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549211_0038

LAMOTTE	T	Zoologie (E.N.S.)
MICHEL A.	T	Chimie Minérale (ORSAY)
OLMER	T	Energétique générale
ROUAULT	T	Electricité (ORSAY)
GAUTHIER	T	Mécanique appliquée
BARCHEWITZ	T	Chimie Physique
BROSSEL	T	Physique atomique
BUSER		Physiologie comparée
CAMUS		Physiologie Vég. (B.M.P.V.)
CASTAING	T	Physique (ORSAY)
CURIEN	T	Minéralog. et Cristallog.
MOYSE	T	Physiologie Végé. (ORSAY)
NOIROT		Evolution des Etres Org.
PANNETIER	T	Chimie générale (ORSAY)
POSSOMPES	T	Zoologie
PULLMANN	T	Chimie théorique
TEILLAC	T	Physique Nucl. et Radioactivité
TONNELAT	T	Biologie Physico-Chim.
VILLE	T	Econométrie
WILLEMART		Chimie (P.C.B.)
DODE	T	Chimie (ORSAY)
FREYMANN	T	Recherches Physiques
GUINOCHET	T	Biol. Vég. S.P.C.N. (ORSAY)
ROLLET	T	Chimie (P.C.B.)
Mle JOSIEN	T	Chimie S.P.C.N.
CHEVALLEY	T	Géométrie algébrique et théorie des groupes
ARNOULT	T	Electronique (ORSAY)
CHAPELLE	T	Physique (ORSAY)
DELANGE	T	Mathématiques (ORSAY)
DENY	T	Mathématiques Géné. (ORSAY)
GERMAIN	T	Mécan. théor. des fluides
LUCAS G.	T	Géologie
ALLARD	T	Chimie Physique
BERTHELOT	T	Phys. Fondamentale des Hautes Energies (ORSAY)
BRICART	T	Météorologie et phys. de l'Atmosphère
Mme ALBE-FESSARD		Psychophysiologie
FRIEDEL		Physique des Solides (ORSAY)
M. JULIA		Etudes des Moléculaires naturelles complexes
LENDER	T	Biologie Animale (S.P.C.N.) ORSAY
MAGAT		Physico-chimie des radio-éléments
Mle QUINTIN	T	Electrochimie
MONOD	T	Chimie du métabolisme
BENOIT	T	Physiol. Anim. (ORSAY)
DE POSSEL	T	Analyse numérique
CHARLOT	T	Chimie analytique
HAISSINSKY	T	Radiochimie
LEMÉE	T	Physiol. Vég. B.M.P.V. (ORSAY)
GUERIN	T	Chimie M.P.C. (ORSAY)
CHATELET M.		Chimie (P.C.B.)
JEAN	T	Physique Nucléaire (ORSAY)
MATTLER	T	Physique S.P.C.N.
MICHEL L.		Physique théorique des Hautes Energies (ORSAY)
BERGERARD		Zoologie (ORSAY)
BERTEIN		Electronique (ORSAY)
BOUISSIERES		Chimie des Radioéléments (ORSAY)
Mme COUTURE		Thermodynamique et Méc. Physique
ELLENBERGER		Géologie appli. s. le terr.
FRANC		Biol. Animale (P.C.B.)
SCHNELL		Botanique tropicale (ORSAY)
STOLKOWSKI		Physiologie générale
ACHER		Chimie Biol. (ORSAY)
BAUDOIN		Biologie animale (P.C.B.)
BEAUMONT		Biologie animale (S.P.C.N.)
BLAMONT		Géophysique Ionosphère
BOURREAU		Botanique
CURIE D.		Physique (M.G.P.)
DURAND-DELGA		Géologie
FREON	T	Chimie organique (ORSAY)
HELLER		Physiologie végétale
TORTRAT		Calcul des Probabilités
CAILLEUX		Géologie (S.P.C.N.)
MAGNAN	T	Physique (S.P.C.N.)
DAUDEL	T	Mécanique ondulatoire appl. à la Chim. Théor. et à la Phys. Nucléaire
Mle FOURCROY		Biol. Végétale (S.P.C.N.)
Mme CHOQUET-BRUHAT	T	Méc. Analytique et Méc. céleste
Mle VEIL		Physiologie Générale
LWOFF	T	Microbiologie
SIESTRUNCK	T	Mécan. Phys. et Expérim.
LACOMBE	T	Métallur. des métaux Nucl.
BROCHARD	T	Physique P.C.B. (ORSAY)
CABANNES	T	Mécanique générale
LESIEUR	T	Mathématiques M.P.C. (ORSAY)
MAZET	T	Mécanique générale (ORSAY)
CAIRE		Géographie phys. et Géol. Dynamique
COMOLET		Mécanique des Fluides
CORABŒUF		Physiologie Animale
DELLOUE		Physique de l'exosphère
GORENFLOT		Botanique II (ORSAY)
HOUILLON		Biologie Animale P.C.B.
JULLIEN J.		Chimie P.C.B.
MALGRANGE		Tech. Math. de la Phys.
OLIVIER		Antropologie
NOZERAN	T	Botanique II (ORSAY)
BLANC-LAPIERRE		Physique E.N.S. (ORSAY)

Secrétaire Général ..... R. POULLAIN

A MON PERE

INTRODUCTION

En théorie unitaire pentadimensionnelle de Jordan-Thiry [12] (1) les composantes du tenseur fondamental définissant la métrique de la variété riemannienne V_5 sont déterminées par un système d'équations tensorielles généralisant formellement le système des équations d'Einstein de la relativité générale. Nous rappelons dans le premier chapitre les hypothèses classiques qu'il convient de faire sur la variété V_5. Le principe de descente appliqué à cette variété riemannienne doit conduire à des trajectoires quadridimensionnelles comparables, dans la variété quotient V_4, aux trajectoires relativistes de l'espace-temps.

Mme Hennequin a étudié dans sa thèse [5] la détermination en première approximation des potentiels ; le système de coordonnées utilisé est adapté à l'hypothèse de cylindricité, le champ est quasi galiléen et les familles de surfaces $x^\lambda = \text{const.}$ (2) vérifient dans V_5 une équation aux dérivées partielles généralisant formellement la relation d'isothermie classique en relativité. Ces calculs sont repris dans la partie (A) du second chapitre ; nous avons modifié a priori les ordres des potentiels γ_{o4} et γ_{oA} qui doivent être respectivement $1/c$ et $1/c^3$ pour que les deux membres correspondants des équations d'Einstein aient des parties principales du même ordre. Nous rappelons brièvement les résultats : les potentiels de la métrique quotient induite sur l'espace quotient diffèrent des potentiels relativistes ; pour retrouver ces derniers en première approximation il est nécessaire de munir V_4 d'une nouvelle métrique dite conforme. L'introduction de cette métrique comporte d'ailleurs des avantages annexes : on obtient un facteur de gravitation constant en interprétant les équations dans V_4 munie de la métrique conforme ;

.....

(1) Les numéros entre crochetsrenvoient à la bibliographie page 99.

(2) Les notations utilisées, concernant les indices ... etc, sont indiquées page 8 .

..... les dérivées secondes du quinzième potentiel disparaissent dans les dix premières équations tensorielles correspondant aux indices i, j ; les coordonnées x^i vérifient les relations d'isothermie relativistes dans cette métrique.

Dans la partie (B) du chapitre II nous abordons le calcul en seconde approximation des potentiels. Nous ne présentons que le calcul complet du potentiel conforme g^*_{44}, évaluation nécessaire si l'on désire obtenir une seconde approximation de la métrique. Le calcul du potentiel g^*_{44} met en évidence de remarquables simplifications à l'encontre des potentiels de V_5 qui demeurent complexes ; le terme d'ordre $1/c^2$ de g^*_{44} se décompose additivement en deux expressions, la première est très exactement celle obtenue dans des conditions analogues en relativité générale ; la seconde, d'origine électromagnétique, n'est autre que le potentiel relatif à la densité d'énergie électromagnétique $E^2 + H^2$, E et H désignant les champs électrique et magnétique. Ce second terme s'évanouit naturellement en l'absence de charges, ce qui permet de retrouver dans l'hypothèse d'un schéma gravitationnel pur les termes relativistes exacts. Précisons que dans le calcul du second terme (électromagnétique) nous avons tenu compte de contributions (dépendant uniquement des dérivées partielles du potentiel vecteur) d'un ordre théoriquement trop élevé vis à vis de l'ordre en $1/c$ des termes de gravitation pure propres à la seconde approximation. Les termes gravitationnels et électromagnétiques pouvant présenter des ordres de grandeur très différents suivant le schéma étudié, la précision supplémentaire envisagée se trouve ainsi justifiée a priori.

Le chapitre III est réservé à la mise en évidence de certaines difficultés inhérentes aux hypothèses adoptées. La difficulté majeure réside dans le fait que les équations du mouvement en première approximation ne s'identifient pas aux équations de la mécanique classique. En effet si l'on considère un schéma gravitationnel pur en théorie à quinze variables de champ, on constate aisément que la trajectoire d'une masse d'épreuve non chargée n'est pas géodésique de la métrique conforme de V_4. Ceci suffit a priori pour que l'espace quotient doué de cette métrique ne puisse jouer le rôle de l'espace temps relativiste.

Les termes électromagnétiques intervenant en première approximation dans les équations de mouvement d'une particule chargée ne conviennent d'ailleurs pas. On constate en effet l'introduction d'un potentiel Ω relatif à une densité fictive ρ^2/γ , ρ étant la densité de charge, γ la densité de masse ; Ω ne correspond à aucun terme classique et devrait de ce fait être considéré comme spécifique à la théorie pentadimensionnelle. Cette possibilité doit être exclue car la contribution correspondante est prépondérante vis-à-vis des autres termes classiques. Enfin nous signalons une troisième difficulté : la densité énergétique évaluée naturellement en métrique conforme n'est pas conservée le long des lignes de courant de V_4 dans le cas d'un schéma gravitationnel pur, seule l'expression $m^*\sqrt{\xi}$ possède cette propriété ce qui ne s'interprète pas de façon classique.

Nous sommes donc en présence de deux faits apparemment contradictoires : d'une part le calcul de la seconde approximation montre que la variété quotient douéede la métrique conforme possède des potentiels rigoureusement identiques (en l'absence de champ électromagnétique), à une troisième approximation près, aux potentiels de relativité ; d'autre part les équations de mouvement sont à rejeter dès la première approximation.

Il est clair que les deux premières difficultés signalées plus haut ont pour cause la présence d'un terme $\frac{1}{\sqrt{\xi}}$ dans les équations du mouvement écrites dans la variété V_4 à l'aide du principe de descente, soit :

$$\delta \left\{ \int \sqrt{1 + \frac{h^2}{\xi^2}} \, \frac{ds^*}{\sqrt{\xi}} + h \beta_0 \varphi \right\} = 0$$

En effet la fonction sous le signe somme a une partie principale égale à c, donc constante ; le terme en $1/c^2$ du développement de $\frac{1}{\sqrt{\xi}}$ influe directement sur les équations du mouvement en première approximation. Ce même terme parasite ξ perturbe également l'équation de continuité ainsi que nous l'avons signalé.

Ces remarques nous incitent au chapitre IV à modifier la structure du tenseur pentadimensionnel $\Theta_{\alpha\beta}$; considérant dans V_5 un tenseur généralisant formellement le tenseur relativiste du schéma fluide parfait holonome, nous constatons que l'ensemble des difficultés disparaît si l'on fait choix d'un indice pentadimensionnel précisément égal à $\sqrt{\xi}$; il est essentiel de remarquer que le nouveau terme ainsi introduit dans l'expression du tenseur

$$\Theta_{\alpha\beta} = r \, v_\alpha \, v_\beta - k \, \gamma_{\alpha\beta}$$

doit satisfaire à des conditions très strictes. Le scalaire k doit être d'ordre $1/c^2$ par rapport à r et à ce titre intervenir uniquement dans les calculs en seconde approximation des potentiels ; il doit d'autre part s'annuler sur les hypersurfaces de séparation dans V_5 pour satisfaire aux conditions de raccordement entre les champs intérieurs et extérieur .

Ces exigences font que l'existence d'un tel scalaire k n'est pas assurée quelle que soit la distribution matérielle considérée. Nous étudions au chapitre V un cas particulier très important : celui du problème de Schwarzschild généralisé à la théorie pentadimensionnelle. La propriété de symétrie sphérique dans V_4 jointe à la cylindricité de V_5 permet de définir aisément le scalaire k. En réalité, il suffit d'obtenir une évaluation assez approchée du développement de k (suivant les puissances successives de 1/c) pour retrouver les résultats classiques concernant le problème des deux corps dans l'hypothèse où l'un des corps présente la symétrie sphérique et où l'autre corps est considéré comme infiniment petit par rapport au premier.

Le choix d'un tenseur $\Theta_{\alpha\beta}$ définissant un indice égal à $\sqrt{\xi}$ met en évidence l'importance de la notion de métrique conforme dans la variété V_5 elle même : la trajectoire pentadimensionnelle d'une masse d'épreuve sera une géodésique de V_5 munie de sa métrique conforme. Le principe de descente conduit alors naturellement à envisager la variété quotient V_4 douée de la métrique conforme de Mme Hennequin. Cette variété, possédant toutes les propriétés de l'espace-temps relativiste, peut être ainsi identifiée à ce dernier dans le cadre de la théorie pentadimensionnelle.

Le principe des géodésiques étant vérifié en métrique conforme de V_5 nous sommes naturellement conduits à interpréter dans cette métrique les conditions de conservation relatives au tenseur $\Theta_{\alpha\beta}$. Nous constatons qu'il est possible de substituer au tenseur $\Theta_{\alpha\beta}$ un nouveau tenseur, noté $\overset{*}{X}_{\alpha\beta}$, conservatif en métrique conforme de V_5, pour lequel les conditions de conservation écrites dans cette métrique sont équivalentes aux conditions

$$D_\alpha \Theta^{\alpha}_{\ \beta} = 0$$

écrites en métrique naturelle de V_5.

Il est important de noter que le tenseur $\overset{*}{X}_{\alpha\beta}$ généralise formellement le tenseur relativiste du schéma matière pure, le terme $k\,\gamma_{\alpha\beta}$ disparaissant dans le changement de métrique et n'intervenant donc pas dans les équations effectives du mouvement. Cependant seule la densité

tensorielle $\overset{*}{X}_{\alpha\beta}\sqrt{\gamma^*}$ possède des composantes d'indices (i, j) ri-

goureusement égales, en l'absence de charges, à celles de la densité tensorielle envisagée en relativité ; en effet cette densité tensorielle est seule à intervenir explicitement dans l'élaboration des équations de mouvement.

Cette remarque nous permet de construire la densité tensorielle correspondant à un schéma généralisant le schéma fluide parfait. Considérant en premier lieu le cas purement gravitationnel nous obtenons des équations de mouvement très proches des équations classiques. La seule différence réside en effet dans l'intervention d'un terme de pouvoir diélectrique, terme de contribution négligeable dans des calculs effectifs en seconde approximation. Dans le cas général d'un schéma fluide chargé, le tenseur $\overset{*}{X}_{\alpha\beta}$ définit dans la variété V_5 munie de sa métrique conforme un indice F^* qui doit jouer le rôle de l'indice relativiste ; F^* diffère en effet de ce dernier par des termes de pouvoir diélectrique relevant d'une troisième approximation.

Le tenseur $\overset{*}{X}_{\alpha\beta}$ étant ainsi déterminé de façon à donner lieu à des équations de mouvement satisfaisantes, il convient de définir en métrique naturelle de V_5 un tenseur conservatif $\Theta_{\alpha\beta}$ équivalent au tenseur $\overset{*}{X}_{\alpha\beta}$ au point de vue des conditions de conservation. Ce tenseur doit naturellement définir en métrique naturelle un indice égal à $\overset{*}{F}\sqrt{\xi}$; cette condition suffit pour déterminer les scalaires r' et k' associés.

Nous considérons enfin le problème de Cauchy dans le cadre d'un schéma intérieur en théorie pentadimensionnelle ; nous envisageons plus particulièrement la détermination des dérivées d'indice 4 des scalaires r' et k' à la traversée de l'hypersurface portant les données initiales. Dans une première étude nous montrons qu'il est possible, quelle que soit la métrique envisagée, de retrouver exactement les résultats concernant le schéma fluide relativiste non chargé. Il suffit pour cela de substituer dans les équations tensorielles les scalaires classiques ρ et p aux quantités r' et k'. Cette façon de faire semble néanmoins peu naturelle dans le cadre de la théorie pentadimensionnelle et dans une seconde étude nous reprenons le raisonnement en considérant directement les scalaires r' et k'. Nous obtenons ainsi des résultats nouveaux en parfait accord avec les anciens. L'expression du scalaire r se trouve précisée une fois de plus par la condition suivante : la vitesse des fronts d'onde doit être égale à celle de la lumière lorsque ces ondes se propagent dans des solides incompressibles non chargés. La structure plus complexe du tenseur $\Theta_{\alpha\beta}$

permet en effet de déterminer ces fronts d'onde, même lorsque l'on fait abstraction de la pression ce qui était impossible en relativité. Nous retrouvons enfin dans l'étude d'un schéma fluide généralisé le cas d'un schémafluide incompressible dont l'équation d'état est, en première approximation, celle utilisée en relativité.

En conclusion, les études théoriques présentées sont élaborées en munissant la variété V_5 de deux métriques. Dans la métrique initiale, dite naturelle, sont écrites les équations tensorielles de champ déterminant les potentiels : l'interprétation des identités de conservation s'effectue en introduisant une seconde métrique conforme à la métrique initiale. La variété V_5, munie de cette métrique conforme, fournit le cadre pentadimensionnel correct pour l'étude des équations approchées du mouvement. Cette étude dans V_5 conforme peut être traduite comme il convient dans la variété quotient munie de la métrique conforme de Mme Hennequin, variété qui peut être identifiée à l'espace-temps relativiste.

Cette double conception permet ainsi de simplifier d'une part l'écriture des équations tensorielles du champ, d'autre part l'interprétation physique qui en résulte. En conséquence, il ne paraît pas utile de chercher systématiquement à n'utiliser qu'une seule métrique ce qui aurait pour effet d'entraîner une complexité plus grande des équations tensorielles à adopter.

Le chapitre V est réservé à deux applications. Dans une première partie (A) nous revenons sur le problème de Schwarzschild en théorie pentadimensionnelle. Cette étude constitue une application directe des résultats théoriques présentés précédemment.

Dans une seconde partie (B) nous abordons le problème des deux corps de façon générale ; il s'agit de décrire le mouvement relatif de deux corps que nous supposons non chargés. Il faut donc rendre compte de deux distributions matérielles en présence. Le tenseur envisagé dans l'étude du problème de Schwarzschild apparaît comme insuffisamment précis : il ne permet pas en effet de réaliser le raccordement entre le champ extérieur et les champs intérieurs aux deux masses. Nous sommes conduits alors à envisager un tenseur généralisant formellement le tenseur d'impulsion énergie d'un schéma fluide quelconque relativiste. Nous interprétons la partie complémentaire de ce tenseur comme décrivant les différences existant entre les pressions partielles de gravitation le long des directions principales dans le cas intérieur (quadrique des pressions dues à la gravitation).

Utilisant comme système de coordonnées celui qui est défini par les divers repères principaux, nous montrons qu'il est possible de définir un tel tenseur. Cette détermination est effectuée avec le souci de ne perturber ni les équations de mouvement, ni le calcul en seconde approximation

du potentiel conforme $\overset{*}{g}_{44}$: les conditions de raccordement étant satisfaites avec une large indétermination, nous pouvons appliquer les calculs faits en seconde approximation à l'étude du problème des deux corps avec les hypothèses de Levi-Civita [6] . La seule différence apparaît dans la contribution du terme de pouvoir diélectrique k (terme pouvant être interprété en fonction de la pression de gravitation) ; il en résulte un simple changement de coefficient dans un des termes intervenant au second ordre : le "principe d'effacement" reste valable en théorie pentadimensionnelle, la correction du déplacement du périhélie se trouve légèrement modifiéepar la contribution du terme relatif au pouvoir diélectrique variable de l'espace vide. Cette correction, sans influence sur l'expression du déplacement du périhélie de Mercure, ne deviendrait sensible que si les masses considérées étaient du même ordre de grandeur.

Je me permets d'exprimer ici toute ma respectueuse gratitude à Monsieur Yves THIRY qui, m'ayant proposé le sujet de cette thèse, m'a constamment aidé de ses conseils et m'a guidé avec beaucoup de sympathie ; c'est grâce à ses avis, à ses encouragements que j'ai pu terminer ce travail.

Je remercie profondément Monsieur LICHNEROWICZ qui a bien voulu témoigner de l'intérêt à mes recherches, m'encourager et m'a fait le grand honneur d'accepter la présidence du jury.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur CHOQUET pour les conseils qu'il m'a prodigués dans l'élaboration de ma seconde thèse et à Monsieur DENY qui a bien voulu faire partie du jury.

Que Monsieur ARBAULT, Monsieur BOUCHARD et Monsieur MARIOT, qui m'ont facilité l'exécution de ce travail soient également remerciés.

Je souhaite que ces Professeurs trouvent ici l'expression de ma gratitude et de mon admiration.

NOTATIONS ET SYMBOLES UTILISES.

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots \delta$: tout indice grec prend les valeurs 0, 1, 2, 3, 4.

i, j, k, l ... :ces indices latins prennent les valeurs 1, 2, 3, 4.

u, v : ces indices latins prennent les valeurs 0, 1, 2, 3.

A, B : ces majuscules latines prennent les valeurs 1, 2, 3.

x^4 désigne la variable temporelle.

x^0 désigne la cinquième variable pentadimensionnelle.

$\partial_\alpha f$ désigne la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$.

$\partial_{\alpha\beta} f$ désigne la dérivée partielle du second ordre $\frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$.

D_α et $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ représentent respectivement le symbole de dérivation covariante et les symboles de Christoffel dans la variété V_5 munie de la métrique naturelle $d\sigma^2 = \gamma_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$.

$\overset{*}{D}_\alpha$ et $\overset{*}{\Gamma}{}^\gamma_{\alpha\beta}$ représentent ces mêmes symboles dans la variété V_5 munie de sa métrique conforme $d\overset{*}{\sigma}{}^2 = \xi\, d\sigma^2$. D'une façon générale tout élément (opérateur, symbole ... etc) exprimé en métrique conforme sera muni d'un astérisque.

∇_i et $\overset{*}{\nabla}_i$ sont ainsi respectivement les symboles de dérivation covariante de la variété V_4 munie de la métrique quotient naturelle ou de la métrique conforme de Mme Hennequin.

Les notations sont de façon générale celles utilisées par A. Lichnérowicz dans [9] et par Mme Hennequin dans [5].

CHAPITRE I

Rappels concernant la théorie pentadimensionnelle de Jordan-Thiry.

---

1. La variété riemannienne V_5 et la variété quotient V_4.

Dans ce chapitre nous reprenons brièvement les hypothèses fondamentales permettant d'élaborer une théorie unitaire dans le cadre géométrique d'une variété de Riemann à cinq dimensions.

Une variété V_n à n dimensions est un espace topologique connexe dont chaque point possède un voisinage homéomorphe à un pavé ouvert de l'espace euclidien à n dimensions. Ces homéomorphismes induisent sur V_n des systèmes de coordonnées locales (ou cartes locales) qui définissent sur V_n une structure de variété différentiable de classe C^r si :

- a) l'ensemble des cartes locales (ou atlas) recouvre V_n.
- b) en un point appartenant à l'intersection des domaines de deux cartes locales, les coordonnées de ce point par rapport à l'une des cartes sont des fonctions r fois continûment différentiables à jacobien non nul des coordonnées du même point par rapport à l'autre carte.

Nous considérons une variété V_5 douée d'une structure de variété différentiable de classe C^2, nous supposons en outre que dans un changement de carte locale les dérivées secondes du changement de coordonnées sont des fonctions de classe C^2 par morceaux (au sens de Hadamard).

Sur cette variété nous supposons définie une métrique riemannienne partout de type hyperbolique normal :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x^\lambda)\, dx^\alpha dx^\beta \qquad (\alpha, \beta, \lambda = 0, 1, 2, 3, 4) \tag{I - 1}$$

En chaque point de V_5 cette forme quadratique se présente comme une somme algébrique de cinq carrés, soit :

$$ds^2 = -\omega^{0^2} + \omega^{4^2} - \omega^{1^2} - \omega^{2^2} - \omega^{3^2} .$$

Les ω^α constituent un système de formes de Pfaff locales linéairement indépendantes ; le seul carré précédé du signe + sera affecté de l'indice 4 (indice à caractère temporel).

Le repère $(x, \vec{e}_\alpha)$ associé à la base duale est dit orthonormé dans

V_5 , et l'on a :

$$\overrightarrow{dx} = \omega^{\alpha} \vec{e}_{\alpha} ,$$

avec

$$\vec{e}_{\alpha} . \vec{e}_{\beta} = 0 \quad (\alpha \neq \beta) \quad , \quad \vec{e}_4^{\,2} = +1 \quad , \quad \vec{e}_{\mu}^{\,2} = -1 \quad (\mu = 0,1,2,3) .$$

Dans un système de coordonnées quelconque le tenseur fondamental $\gamma_{\alpha\beta}$, dont les composantes sont appelées les potentiels, munit la variété différentiable d'une structure riemannienne.

Les potentiels sont supposés être de classe C^1, leurs dérivées partielles sont des fonctions de classe C^2 par morceaux. La métrique définie sur V_5 sera alors dite régulière.

Nous supposons que la variété V_5 admet un groupe connexe à un paramètre d'isométries globales de V_5, à trajectoires Z orientées de façon à rendre $d\sigma^2$ négatif, ne laissant invariant aucun point de la variété (qui se trouve ainsi engendrée par l'ensemble des trajectoires) . Nous supposons en outre que :

- a) Les trajectoires sont homéomorphes à un cercle T^1
- b) On peut trouver une variété différentiable à 4 dimensions V_4, satisfaisant aux mêmes hypothèses de différentiabilité que V_5, telle qu'il existe un homéomorphisme différentiable de classe C^2 de la variété V_5 sur le produit topologique $V_4 \times T^1$ dans lequel les Z s'appliquent sur les cercles facteurs.

La variété V_4 sera dite la variété quotient de V_5 par la relation d'équivalence définie par le groupe ; le développement de la théorie nous conduira naturellement à identifier dans la mesure du possible cette variété quotient avec la variété espace-temps de la relativité générale.

On montre que les hypothèses précédentes (qui sont dites traduire le postulat de cylindricité) entraînent l'existence dans V_5 de coordonnées locales (x^{α}) possèdant les propriétés suivantes :

- 1) Les (x^i) constituent un système de coordonnées locales de V_4. Les variétés x^0 = const. sont globalement définies dans V_5 et homéomorphes à V_4.
- 2) Les potentiels $\gamma_{\alpha\beta}$ relatifs à un tel système sont indépendants de la variable x^0.

Un tel système de coordonnées sera dit adapté au groupe d'isométries. Ces coordonnées sont définies modulo les relations :

$$x^{i'} = \psi^{i'}(x^i) \quad , \quad x^{o'} = x^o + \psi(x^i) \quad ,$$

relations conservant le caractère adapté du repèrage dans un tel changement de coordonnées.

Les variétés x^o = const. d'un système de coordonnées adapté sont appelées sections de V_5 associées au système ; sur une section W_4 se trouvent définis des tenseurs tels que le scalaire γ_{oo} , le vecteur covariant γ_{oi}, le tenseur symétrique γ_{ij}; dans un changement quelconque du système des sections (changement de jauge défini par $x^{i'} = x^i$, $x^{o'} = x^o + \psi(x^j)$) certains de ces tenseurs viennent s'appliquer sur un même tenseur de V_4 (ces applications étant induites par les homéomorphismes définis en 1). De tels tenseurs images sont dits intrinsèquement définis sur la variété quotient. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que le tenseur de W_4 correspondant demeure invariant par changement de jauge.

Ainsi les scalaires γ_{oo} , ξ ($\gamma_{oo} = -\xi^2$) sont définis intrinsèquement sur V_4 ; il en est de même de la forme quadratique ds^2 définie par $ds^2 = \omega^{4\,2} - \omega^{1\,2} - \omega^{2\,2} - \omega^{3\,2}$.

En coordonnées quelconques de V_4 on a

$$ds^2 = \left(\gamma_{ij} - \frac{\gamma_{oi}\,\gamma_{oj}}{\gamma_{oo}} \right) dx^i dx^j = g_{ij}\, dx^i dx^j \quad , \quad (g^{ij} = \gamma^{ij})$$

Le tenseur g_{ij} est ainsi défini intrinsèquement sur la variété quotient, il permet de munir celle-ci d'une structure de variété riemannienne, la métrique ds^2 sera appelée métrique quotient.

2. Le principe de descente appliqué à la variété riemannienne V_5.

Rappelons les résultats obtenus par Y. Thiry. La variété V_5 étant munie de la métrique riemannienne $d\sigma^2$, les géodésiques de cette variété satisfaisant à l'intégrale première :

$$\gamma_{ij}\,\xi^i\,\xi^j = h = \text{const.} \qquad \left(ds^2 = \gamma_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\alpha\,\dot{x}^\beta \;,\; \dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{du} \right) ,$$

se projettent sur la variété quotient V_4 suivant les extrémales de l'intégrale

$$(I-2) \qquad \int L\,du \;,\quad L = \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{\gamma_{oo}}\right)\gamma_{ij}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j} + h\,\frac{\gamma_{oi}}{\gamma_{oo}}\,\dot{x}^i \;,$$

g_{ij} étant le tenseur défini sur V_4 au paragraphe précédent. Ces lignes extrémales, projections sur V_4 des géodésiques de V_5 envisagées ci-dessus, peuvent ainsi elles-mêmes être considérées comme géodésiques de la variété de Finsler construite sur V_4 en munissant cet espace de la métrique définie par la fonction L.

Ce résultat fondamental est évidemment à mettre en parallèle avec celui de la relativité générale. On sait en effet que la théorie provisoire de l'électromagnétisme donne comme trajectoires des particules chargées les extrémales orientées dans le temps de l'intégrale :

$$(I-3) \qquad \int L_R\,du \;,\quad L_R = \frac{ds_R}{du} + k\,\varphi_i\,\frac{dx^i}{du} \;;$$

- ds_R définit la métrique relativiste ($ds_R^2 = g_{ij_R}\;dx^i\;dx^j$)
- k est le rapport des densités de charge et de masse : $k = \frac{\mu}{\rho}$
- les composantes covariantes φ_i définissent le potentiel vecteur (déterminé à un gradient additif près).

Nous sommes naturellement conduits à comparer les fonctions L et L_R. Les composantes g_{ij} du tenseur intrinsèquement défini sur la variété quotient V_4 doivent a priori s'identifier avec les potentiels relativistes g_{ij_R}. Nous constatons la présence dans l'expression de la fonction L du facteur $\sqrt{1 - \frac{h^2}{\gamma_{oo}}}$, deux hypothèses peuvent être envisagées;

A) Le quinzième potentiel γ_{oo} peut être supposé constant dans la variété V_5 (hypothèse de O. Klein). Le facteur considéré se réduit alors à une constante pour une particule déterminée. Les fonctions L et L_R peuvent être exactement identifiées, il suffit de choisir :

$$k = \frac{\beta h}{\sqrt{1 - \frac{h^2}{\gamma_{oo}}}} \quad , \quad \gamma_{oi} = \beta \gamma_{oo} \varphi_i \qquad (\beta = \text{const.})$$

Le développement de la théorie résultant de cette hypothèse (théorie de Kaluza-Klein) n'apporte aucune modification à la théorie provisoire de l'électromagnétisme, elle n'en constitue qu'une formulation différente dans le cadre d'une variété à cinq dimensions.

B) Rejetant l'hypothèse de Klein et supposant a priori le quinzième potentiel variable, nous obtenons par contre une théorie unitaire à quinze variables de champ. Ces quinze potentiels seront déterminés par des équations tensorielles généralisant formellement les équations d'Einstein. Un tenseur symétrique à deux indices possède quinze composantes distinctes dans l'espace tensoriel correspondant construit sur la variété V_5 : nous obtenons un nombre identique de potentiels variables et d'équations de champ pour déterminer ceux-ci. Cette cohérence n'était pas assurée en théorie de Kaluza-Klein.

Dans la théorie correspondant à cette hypothèse (théorie de Jordan-Thiry), les lignes projections sur l'espace quotient des géodésiques de V_5 (satisfaisant à l'intégrale première citée) définissent les trajectoires spatio-temporelles d'une masse d'épreuve chargée. Cette propriété fondamentale résulte des équations de champ ainsi que des conditions de raccordement.

Remarquons que les équations obtenues ne sauraient s'identifier rigoureusement à celles de la théorie provisoire du fait même de la présence de ce quinzième potentiel variable. La théorie devra être développée avec le souci de retrouver avec l'approximation habituelle les résultats classiques.

3. Equations de champ - Conséquences des identités de conservation.

Ainsi que nous venons de le préciser nous ferons choix d'un système d'équations aux dérivées partielles généralisant formellement le système tensoriel d'Einstein en relativité générale. Ces équations seront obtenues en égalant les composantes de mêmes indices de deux tenseurs symétriques :

$$(I - 4) \qquad S_{\alpha\beta} = \Theta_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3, 4)$$

Le tenseur figurant au premier membre doit décrire la structure géométrique de la variété riemannienne V_5. Il est astreint aux mêmes conditions qu'en relativité générale :

- Les composantes ne dépendent que des potentiels et de leurs dérivées des deux premiers ordres et sont linéaires par rapport aux dérivées du second ordre.
- Il satisfait à des "conditions ou identités de conservation" :

$$\gamma^{\alpha\beta} D_\alpha S_{\beta\gamma} = 0 ,$$

où D_α désigne l'opérateur de dérivation covariante pour la connexion riemannienne de V_5.

Le théorème de Cartan montre que, moyennant les conditions précédentes, le tenseur est bien déterminé et doit être écrit sous la forme :

$$S_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(R + K)\gamma_{\alpha\beta} ,$$

$R_{\alpha\beta}$ est le tenseur de Ricci de V_5, R la courbure riemannienne scalaire, K est une constante généralisant la constante cosmologique. On montre qu'il est nécessaire de prendre $K = 0$ pour que les équations de champ interprétées dans la variété quotient soient invariantes par changement de jauge.

Le tenseur $\Theta_{\alpha\beta}$ figurant au second membre doit représenter par contre la distribution des masses et des charges en chaque point de V_5. Son rôle est analogue à celui du tenseur impulsion-énergie de la relativité, mais il doit s'évanouir dans les domaines où, en l'absence de masses et de charges, règne un champ gravitationnel et électromagnétique, ainsi sera réalisé un aspect de la fusion de ces deux champs qui joueront un rôle analogue vis à vis des équations.

Il semble a priori naturel de faire choix d'un tenseur $\Theta_{\alpha\beta}$ généralisant exactement le tenseur relativiste du schéma "matière pure" et de prendre :

$$\Theta_{\alpha\beta} = r\, v_\alpha v_\beta \quad ; \tag{I - 5}$$

r est un scalaire positif à expliciter, v est un vecteur unitaire de V_5 (normé par $v^2 = \pm 1$ suivant son orientation).

Le scalaire r et le vecteur v sont invariants par les transformations du groupe d'isométries, en coordonnées adaptées r et les composantes de v sont donc indépendants de la cinquième variable x^0.

Les trajectoires engendrées dans V_5 par le champ de vecteur v sont appelées lignes de courant pentadimensionnelles.

Le tenseur géométrique d'Einstein étant conservatif il doit en être de même du tenseur $\Theta_{\alpha\beta}$ qui est ainsi soumis aux conditions :

$$D_\alpha \Theta^\alpha{}_\beta \equiv D_\alpha (r\, v^\alpha v_\beta) = 0 \tag{I - 6}$$

Compte tenu du fait que v est un vecteur unitaire, on en déduit les relations :

$$v^{\beta}\, D_{\beta}\, v_{\alpha} = o \qquad , \qquad D_{\alpha}\,(r v^{\alpha}) = o \,.$$

La première relation exprime que les lignes de courant pentadimensionnelles sont géodésiques de la variété riemannienne V_5. On peut aisément vérifier l'existence de l'intégrale première nécessaire à l'application du principe de descente ; le postulat de cylindricité permet en effet d'expliciter l'équation correspondant à l'indice $\alpha = o$ suivant la relation

$$v^{\alpha}\, \partial_{\alpha}\, v_o = o \,,$$

ce qui exprime en coordonnéesadaptées la conservation de la composante v_o le long de chaque ligne de courant de V_5.

La seconde relation est du type équation de continuité, elle exprime que la quantité

$$n = r\, v^4 \sqrt{\gamma} \quad , \quad (\gamma = \text{dét}\ \gamma_{\alpha\beta}) \,,$$

reste constante le long de la trajectoire quadridimensionnelle projection dans la variété quotient de la ligne de courant de V_5.

Le système constitué par les cinq équations de conservation (I - 6) peut ainsi être écrit sous la forme équivalente :

$$(I-7) \qquad \begin{cases} v_o = h \ \text{(intégrale première des géodésiques)} \\ D_{\alpha}\,(r v^{\alpha}) = o \ \text{(équation de continuité)} \\ v^{\beta}\, D_{\beta}\, v_A = o \quad (A = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Nous verrons que les trois dernières équations jouent le rôle des équations classiques du mouvement ; sous la forme différentielle elles déterminent la trajectoire d'une masse d'épreuve ; pour un corps quelconque on obtiendrait les équations du mouvement en intégrant sur le volume du corps.

4. Interprétation des équations de champ dans la variété quotient V_4.

La variété V_5 étant rapportée à un système de repères orthonormés adaptés (le caractère orthonormé est indiqué en soulignant les indices), les composantes du tenseur d'Einstein de la variété V_5 peuvent s'exprimer en fonction des composantes de tenseurs intrinsèquement définis sur V_4 ; il vient comme l'a montré Y. Thiry [12] ,

(I - 3)

$$\begin{cases} S_{ij} = \hat{S}_{ij} - \gamma_0 \xi^2 \left[\frac{1}{4} g_{ij} F_{kl} F^{kl} - F_i^{\ k} F_{jk} \right] - \frac{1}{\xi} \left(\nabla_j \partial_i \xi - g_{ij} \Delta \xi \right) \\ S_{io} = \frac{\beta}{2\xi^2} \nabla_j \left(\xi^3 F^j_{\ i} \right) \\ S_{oo} = \frac{1}{2} \hat{R} + \frac{3}{2} \gamma_0 \xi^2 F^2 \end{cases}$$

$$\left(F^2 = \frac{1}{2} F_{kl} F^{kl} \right) \quad , \quad \left(\hat{R} = g^{ij} \hat{R}_{ij} \right)$$

$\hat{S}_{ij}$ et $\hat{R}_{ij}$ sont les tenseurs d'Einstein et de Ricci construits sur la variété V_4 munie de la métrique quotient ds^2 ; le tenseur F_{ij} est le rotationnel du potentiel vecteur : $F_{ij} = \partial_i \varphi_j - \partial_j \varphi_i$;

le potentiel vecteur étant défini par la relation : $\gamma_{oi} = \beta \varphi_i \gamma_{oo}$.

On vérifie aisément qu'un changement du système des sections modifie le potentiel vecteur en lui ajoutant le vecteur gradient d'une fonction scalaire (indépendante de x^o). Il s'ensuit que le tenseur antisymétrique F_{ij} possède l'invariance de jauge et est ainsi défini intrinsèquement sur V_4.

∇_j est l'opérateur de dérivation covariante dans V_4 munie de la métrique quotient ds^2 ; Δ est le paramètre différentiel du second ordre de Beltrami défini sur V_4 par $\Delta = \nabla_j (g^{ij} \partial_i)$.

Les dix premières composantes de $S_{\alpha\beta}$ peuvent être comparées aux premiers membres des équations relativistes dans lesquels figureraient les composantes correspondantes du tenseur énergétique $\mathcal{T}_{ij}$ relatif au champ électromagnétique ; rappelons en effet que dans une théorie unitaire les deux champs (gravitationnel et électromagnétique) doivent

émaner d'une même structure géométrique. Les quatre composantes S_{i0} représentent, à un coefficient $\frac{3}{2\xi^2}$ près, les premiers membres des équations de Maxwell. La présence du facteur ξ^3 invite à introduire dans le vide des inductions distinctes des champs et à poser, en interprétant ξ^3 comme étant le pouvoir diélectrique du vide

$$H_{ij} = \xi^3 \; F_{ij} \; ,$$

F_{ij} représente donc le tenseur induction magnétique-champ électrique, et H_{ij} le tenseur champ magnétique-induction électrique. On montre qu'à ces deux tenseurs correspond un tenseur d'impulsion énergie d'expression :

$$\mathcal{T}'_{ij} = 1/4 \; g_{ij} \; H_{kl} \; F^{kl} - 1/2 \; (H_i^k \; F_{jk} + H_{jk} \; F_i^k) = \xi^3 \; \mathcal{T}_{ij} \; .$$

Dans le cas unitaire extérieur, c'est-à-dire en l'absence de masses et de charges, les équations de champ se réduisent à :

$S_{\alpha 3} = 0$ c'est-à-dire sensiblement aux équations du schéma champ électromagnétique pur de la relativité si l'on fait abstraction des termes spéciaux relatifs au pouvoir diélectrique.

Envisageons maintenant le cas unitaire intérieur, la présence de matière chargée sera explicitée à l'aide du tenseur envisagé au paragraphe 3. Exprimons les composantes de ce tenseur en fonction d'éléments définis sur V_4. Les composantes du vecteur v s'expriment simplement à l'aide des composantes du vecteur u ($u^2 = +1$) tangent à la trajectoire spatio-temporelle projection. Il vient, en repères orthonormés :

$$v_i = \sqrt{1 + \frac{h^2}{\xi^2}} \; u_i \; , \qquad v_0 = \frac{u_0}{\xi} = \frac{h}{\xi} \; .$$

Les équations du cas unitaire intérieur s'écrivent :

(I - 9)

$$\left\{\begin{array}{l}
\hat{S}_{ij} - \frac{\gamma_0}{\xi}\,\tau_{ij} - \frac{1}{\xi}\left(\nabla_i\partial_j\xi - g_{ij}\,\Delta\xi\right) = \varkappa\left(1+\frac{\hbar^2}{\xi^2}\right)u_i\,u_j \\
\nabla_j H^{ij} = \varrho\,\frac{\xi}{\beta}\,\varkappa\,\hbar\sqrt{1+\frac{\hbar^2}{\xi^2}}\;u_i \\
\frac{1}{2}\hat{R} + \frac{3}{2}\gamma_0\,\xi^2 F^2 = \varkappa\,\frac{\hbar^2}{\xi^2}
\end{array}\right.$$

Les dix premières équations s'apparentent à celles du schéma relativiste "matière pure - champ électromagnétique", avec un terme relatif au pouvoir diélectrique qui est spécifique de la théorie unitaire. Les quatre équations suivantes peuvent s'identifier exactement aux équations de Maxwell ; le vecteur second membre représentant le vecteur courant, on obtient une expression de la densité de charge classique. La quinzième équation détermine enfin les variations du pouvoir diélectrique.

Ces résultats sont obtenus en essayant d'identifier la variété quotient V_4 munie de la métrique ds^2 avec l'espace-temps de la relativité générale. Or Mme Hennequin a montré que les potentiels g_{ij} ne peuvent être assimilés aux potentiels relativistes et a envisagé, pour éliminer cette imcompatibilité, de munir la variété quotient V_4 d'une nouvelle métrique dont les potentiels seraient proportionnels aux précédents.

λ étant un scalaire (variable suivant les coordonnées), la nouvelle métrique - dite métrique conforme - est définie par :

$$d\overset{*}{s}^2 = \lambda\, ds^2.$$

Le calcul d'une première approximation montre que le choix $\lambda = \xi$ permet d'obtenir des potentiels conformes analogues aux potentiels relativistes.

Nous nous contentons de rappeler les principales formules permettant le passage de la métrique quotient à la métrique conforme de Mme Hennequin. On a, les éléments évalués en termes de métrique conforme étant munis d'une étoile,

$$ds^{*2} = \overset{*}{g}_{ij}\, dx^i dx^j \quad , \quad \overset{*}{g}_{ij} = \xi \left(\gamma_{ij} - \frac{\gamma_{oi}\,\gamma_{oj}}{\gamma_{oo}} \right)$$
$$\overset{*}{g}^{ij} = \frac{1}{\xi}\, g^{ij} = \frac{1}{\xi}\, \gamma^{ij} .$$

Les symboles de Christoffel de la connexion riemannienne de V_4 sont définis en métrique conforme par les relations :

$$\overset{*}{\Gamma}{}^{k}_{ij} = \Gamma^{k}_{ij} + \frac{1}{2} \left(\delta^{k}_{i} \frac{\partial_j \xi}{\xi} + \delta^{k}_{j} \frac{\partial_i \xi}{\xi} - g_{ij}\, g^{kl} \frac{\partial_l \xi}{\xi} \right).$$

Le vecteur unitaire tangent aux trajectoires quadridimensionnelles admet pour composantes dans cette métrique :

$$\overset{*}{u}_i = \overset{*}{g}_{ij} \frac{dx^j}{ds^*} = \sqrt{\xi}\, u_i \quad , \qquad \overset{*}{u}{}^i = \frac{1}{\sqrt{\xi}}\, u^i .$$

Les composantes deux fois covariantes du tenseur champ électromagnétique sont déterminées de façon intrinsèque par des grandeurs physiques, elles doivent demeurer invariantes dans le changement de métrique ; il vient :

$$\overset{*}{F}_{ij} = F_{ij} \quad , \quad \overset{*}{F}{}^{ij} = \frac{1}{\xi^2}\, F^{ij} \quad , \quad \overset{*}{\mathcal{C}}{}'_{ij} = \frac{1}{\xi}\, \mathcal{C}'_{ij}$$

Les quatorze premières équations du système (I - 9) écrites en termes de métrique conforme conduisent au système :

(I - 10)

$$\overset{*}{\hat{S}}_{ij} - \gamma_o\, \overset{*}{\mathcal{C}}{}'_{ij} + \frac{3}{4}\, \overset{*}{g}_{ij}\, g^{\mu\nu} \frac{\partial_\mu \xi}{\xi} \frac{\partial_\nu \xi}{\xi} - \frac{3}{2} \frac{\partial_i \xi}{\xi} \frac{\partial_j \xi}{\xi} = \kappa \frac{1}{\xi} \left(1 + \frac{\hbar^2}{\xi^2} \right) \overset{*}{u}_i \overset{*}{u}_j$$
$$\overset{*}{\nabla}_j \overset{*}{H}{}^{ij} = \frac{2\hbar\kappa}{3\sqrt{\xi}} \sqrt{1 + \frac{\hbar^2}{\xi^2}}\; \overset{*}{u}_i \quad ,$$

système auquel il faut adjoindre la quinzième équation régissant les variations de ξ ; cette dernière équation n'est évidemment pas susceptible d'être comparée à une équation classique.

Remarquons certaines simplifications obtenues en interprétant le système (I - 10) - le coefficient multipliant le tenseur $\overset{*}{\mathcal{C}}{}'_{ij}$ ne dépend plus de ξ ; Il est maintenant constant et peut être identifié au coefficient de

gravitation classique - les dix premières équations ne font plus intervenir les dérivées secondes de ξ c'est-à-dire du quinzième potentiel variable.

CHAPITRE II

Etude des approximations en théorie pentadimensionnelle de Jordan-Thiry.

(A)

Rappel des calculs en première approximation de Mme Hennequin.

1. Coordonnées isothermes pentadimensionnelles.

L'hypersurface définie par l'équation $f(x^{\lambda}) = \text{const.}$ sera dite isotherme si la fonction f vérifie la relation

$$(II-1) \qquad \Box f \equiv D_{\alpha}(\gamma^{\alpha\beta}\partial_{\beta} f) = 0 .$$

Supposons que les cinq familles de variétés $x^{\lambda} = \text{const.}$ permettant le repérage dans la variété riemannienne V_5 soient des variétés isothermes. Les coordonnées vérifient dans ce cas les cinq relations :

$$(II-1') \qquad \phi^{\alpha} = -\gamma^{\lambda\mu}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\partial_{\mu}(\gamma^{\mu\alpha}\sqrt{\gamma}) = 0$$

Ces relations généralisent formellement dans V_5 les conditions d'isothermie classiques de la relativité (conditions de De Donder-Lanczos).

Nous noterons $\Gamma^{\mu\alpha}$ les densités tensorielles de poids $\frac{1}{2}$ relatives aux composantes doublement contravariantes du tenseur fondamental de V_5. Les conditions d'isothermie s'écrivent simplement :

$$\partial_{\mu}\Gamma^{\mu\alpha} = 0$$

Considérons de même la densité tensorielle analogue construite sur le tenseur $S^{\alpha\beta}$. Nous noterons $S^{\alpha\beta}_{(i)}\sqrt{\gamma}$ les composantes évaluées dans un système de coordonnées isothermes, l'emploi de telles coordonnées apportant certaines simplifications.

Rappelons simplement l'expression de $S^{\alpha\beta}_{(i)}\sqrt{\gamma}$:

(II - 2)

$$S^{\alpha\beta}_{(i)}\sqrt{\gamma} = \frac{1}{2}\gamma^{\lambda\mu}\partial_{\lambda\mu}\Gamma^{\alpha\beta} - \gamma^{\lambda\mu}\Gamma^{\alpha}_{\lambda}\partial_{\mu}\Gamma^{\alpha\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}\Gamma^{\beta}_{\nu\rho}\gamma^{\lambda\nu}\gamma^{\mu\rho}\sqrt{\gamma} + \Gamma^{\alpha\beta}\Sigma$$

avec

$$\Sigma = \frac{1}{2}\gamma^{\lambda\mu}\Gamma^{\nu}_{\lambda}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + \frac{1}{4}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\partial_{\lambda}\gamma^{\mu\nu},$$

$$\Gamma^{\nu}_{\lambda} = \Gamma^{\nu}_{\lambda\alpha} = \partial_{\lambda}\,\mathrm{Log}\sqrt{\gamma}$$

Les équations de champ s'écrivent :

$$S^{\alpha\beta}_{(i)}\sqrt{\gamma} = \textcircled{H}^{\alpha\beta} \qquad \text{avec} \qquad \textcircled{H}^{\alpha\beta} = \Theta^{\alpha\beta}\sqrt{\gamma} = \kappa\, w^{\alpha} w^{\beta}\sqrt{\gamma}$$

Les deux résultats fondamentaux obtenus par Mme Hennequin sont alors les suivants :

a) Le choix d'un système de coordonnées isothermes pentadimensionnelles est compatible avec le caractère cylindrique du champ. Autrement dit il est possible de déterminer des coordonnées possédant simultanément les propriétés d'être isothermes et adaptées.

b) Les équations approchées du mouvement entraînent la vérification (au même ordre d'approximation) des conditions d'isothermie approchées.

Cette dernière proposition affirme que les solutions approchées successivement obtenues, solutions vérifiant les conditions de conservation $D_{\alpha}\,\Theta^{\alpha}_{\beta} = o$ à l'approximation correspondante, sont telles que les conditions d'isothermie $\Phi^{\alpha} = o$ soient effectivement vérifiées avec cette même approximation. Ceci nous prouve que la solution trouvée est bien solution approchée du problème initial défini en coordonnées quelconques par les équations tensorielles d'Einstein.

Dans un système de coordonnées adaptées isothermes, dont l'existence est indiquée par la proposition a), la dérivation partielle par rapport à la variable x^{o} n'intervient plus dans les expressions des $S^{\alpha\beta}_{(i)}\sqrt{\gamma}$.

Dans un tel système nous pouvons écrire :

(II - 3)

$$S^{\alpha\beta}_{(i)}\sqrt{\gamma} = \frac{1}{2}\gamma^{ij}\partial_{ij}\Gamma^{\alpha\beta} - \gamma^{ij}\Gamma^{\alpha}_{i}\partial_{j}\Gamma^{\beta} - \sqrt{\gamma}\,\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}\Gamma^{\beta}_{\nu\rho}\gamma^{\lambda\nu}\gamma^{\mu\rho} + \Gamma^{\alpha\beta}\Sigma$$

avec $$\Sigma = \frac{1}{2}\gamma^{ij}\Gamma^{\lambda}_{i}\Gamma^{\mu}_{j} + \frac{1}{4}\Gamma^{i}_{\lambda\mu}\partial_{i}\gamma^{\lambda\mu} .$$

2. Hypothèses relatives au champ unitaire.

Le champ étant supposé faible, les potentiels unitaires seront considérés comme étant voisins des potentiels triviaux $\eta_{\alpha\beta}$ du champ unitaire nul.

$$\eta_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha \neq \beta) \quad , \quad \eta_{44} = c^2 \quad , \quad \eta_{00} = \eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1 \ .$$

Nous supposons que le champ unitaire admet un comportement asymptotique euclidien. Alors, par définition, nous pourrons écrire (dans le système de coordonnées envisagé) les inégalités :

$$\left|\gamma_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta}\right| < \frac{M}{r} \quad , \quad \left|\partial_{r}\gamma_{\alpha\beta}\right| < \frac{M}{r^2} \ ,$$

dès que la distance r = d (a , x) du point x au point fixe a de la variété est assez grande (M étant un nombre fixe donné à l'avance).

On montre aisément que ces hypothèses entraînent le comportement asymptotique euclidien de la variété quotient V_4 douéede la métrique ds^2 (ou de la métrique conforme).

Nous supposons en outre que les différences $\gamma_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta}$ admettent des développements limités par rapport à $1/c^2$ considéré comme infiniment petit principal (c = célérité de la lumière). Un champ unitaire satisfaisant à ces hypothèses est dit quasigaliléen.

Nous supposons enfin avec Mme Hennequin [5] que ce caractère quasi galiléen n'est pas altéré lorsqu'on fait choix d'un système de coordonnées isothermes.

3. Calculs en première approximation.

Considérons a priori les développements limités des potentiels unitaires :

$$
(II-4)\qquad
\begin{cases}
\gamma_{oo} = -1 - 4\dfrac{\alpha_{oo}}{c^2} + 0\,(1/c^4) \\
\gamma_{oA} = \dfrac{\alpha_{oA}}{c^3} + 0\,(1/c^5) \\
\gamma_{o4} = \dfrac{\alpha_{o4}}{c} + 0\,(1/c^3) \\
\gamma_{AB} = -\delta_{A}^{B} + \dfrac{\alpha_{AB}}{c^2} + 0\,(1/c^4) \\
\gamma_{4A} = \dfrac{\alpha_{4A}}{c^2} + 0\,(1/c^4) \\
\gamma_{44} = c^2 + \alpha_{44} + 0\,(1/c^2)
\end{cases}
$$

Les notations seront en général celles utilisées par Mme Hennequin. Nous modifions cependant les parties principales des potentiels γ_{oA} et γ_{o4} de façon à ce que les premiers et seconds membres des équations d'Einstein correspondantes soient du même ordre vis à vis de $1/c$.

Il vient

$$\gamma = c^2 + \alpha_{44} + 4\,\alpha_{oo} - \alpha_{MM} + 0\,(1/c^2)\,,$$

soit :
$$\gamma^{\frac{1}{2}} = c\left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}\alpha_{44} + 2\alpha_{oo} - \frac{1}{2}\alpha_{MM}\right) + 0\,(1/c^4)\right]$$

γ est le déterminant d'ordre 5 des potentiels unitaires.

α_{MM} représente la somme $\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}$.

Les règles usuelles permettent d'évaluer des développements limités des composantes doublement contravariantes des potentiels, nous avons :

$$\gamma^{\alpha\beta} = \frac{\overline{\gamma}_{\alpha\beta}}{\gamma}\,,$$

$\overline{\gamma}_{\alpha\beta}$ étant le coefficient de l'élément $\gamma_{\alpha\beta}$ dans le développement du déterminant γ (complément algébrique de $\gamma_{\alpha\beta}$). Il vient tous calculs faits :

$$\gamma^{oo} = -1 + 4\frac{\alpha_{oo}}{c^2} + 0\,(1/c^4)$$

$$\gamma^{oA} = -\frac{\alpha_{oA}}{c^3} + 0\,(1/c^5)$$

$$\gamma^{o4} = +\frac{\alpha_{o4}}{c^3} + 0\,(1/c^5)$$

$$\gamma^{AB} = -\delta_A^B - \frac{\alpha_{AB}}{c^2} + 0\,(1/c^4)$$

$$\gamma^{4A} = +\frac{\alpha_{4A}}{c^4} + 0\,(1/c^6)$$

$$\gamma^{44} = \frac{1}{c^2} - \frac{\alpha_{44}}{c^4} + 0\,(1/c^6)$$

On en déduit les développements des densités tensorielles $\Gamma^{\alpha\beta} = \sqrt{\gamma}\,\frac{1}{2}\,\gamma^{\alpha\beta}$ qui interviennent directement dans le calcul des premiers membres des équations. Soit :

$$\Gamma^{oo} = -c + \frac{\Lambda^{oo}}{c} + 0\,(1/c^3) \qquad \text{où} \qquad \Lambda^{oo} = 2\alpha_{oo} + \frac{1}{2}\,(\alpha_{MM} - \alpha_{44})$$

$$\Gamma^{oA} = \frac{\Lambda^{oA}}{c^2} + 0\,(1/c^4) \qquad \Lambda^{oA} = -\alpha_{oA}$$

$$\Gamma^{o4} = \frac{\Lambda^{o4}}{c^2} + 0\,(1/c^4) \qquad \Lambda^{o4} = +\alpha_{o4}$$

$$\Gamma^{AB} = -c\,\delta_A^B + \frac{\Lambda^{AB}}{c} + 0(1/c^3) \qquad \Lambda^{AB} = -\alpha_{AB} - \delta_A^B\,(2\alpha_{oo} + \tfrac{1}{2}\alpha_{44} \ldots$$

$$\Gamma^{4A} = \frac{\Lambda^{4A}}{c^3} + 0\,(1/c^5) \qquad \Lambda^{4A} = \alpha_{4A} \qquad \ldots - \tfrac{1}{2}\alpha_{MM})$$

$$\Gamma^{44} = \frac{1}{c^3} + \frac{\Lambda^{44}}{c^3} + 0\,(1/c^5) \qquad \Lambda^{44} = 2\alpha_{oo} - \frac{1}{2}(\alpha_{MM} + \alpha_{44})$$

Contribution des premiers membres :

Il est facile de constater que seul le premier terme de (II - 3), soit $\frac{1}{2}\,\gamma^{ij}\,\partial_{ij}\,\Gamma^{\alpha\beta}$, est à retenir en première approximation; les parties principales des premiers membres s'écrivent :

$$S^{oo}_{(i)}\sqrt{g} = -\frac{\Delta\Lambda^{oo}}{2c} + 0(1/c^3)\ ;\quad S^{4A}_{(i)}\sqrt{g} = -\frac{1}{2c^3}\,\Delta\alpha_{4A} + 0(1/c^5)$$

$$S^{AB}_{(i)}\sqrt{g} = -\frac{\Delta\Lambda^{AB}}{2c} + 0(1/c^3)\ ;\quad S^{oA}_{(i)}\sqrt{g} = +\frac{1}{2c^2}\,\Delta\alpha_{oA} + 0(1/c^4)$$

$$S^{44}_{(i)}\sqrt{g} = -\frac{\Delta\Lambda^{44}}{2c^3} + 0(1/c^5)\ ;\quad S^{o4}_{(i)}\sqrt{g} = -\frac{1}{2c^2}\,\Delta\alpha_{o4} + 0(1/c^5)$$

Δ est l'opérateur $\partial_{11} + \partial_{22} + \partial_{33}$

- Contribution des seconds membres :

Le scalaire r doit en première approximation être égal à $\gamma_o \rho$, γ_o est le coefficient de gravitation de la relativité, ρ est la densité usuelle de la matière.

Nous écrivons de façon classique :

$$r\,(1 + h^2) = \gamma_o \rho \left[1 + 0\,(1/c^2)\right].$$

Les composantes contravariantes du vecteur unitaire v ont pour expressions : $v^o = -h\left[1 + 0\left(\frac{1}{c^2}\right)\right]$

$$v^A = V^A\ v^4\ , \qquad v^4 = \frac{1}{c}\sqrt{1 + h^2}\left[1 + 0\,(1/c^2)\right]\ ,$$

h est le paramètre relatif à l'intégrale des géodésiques ($v_o = h$), V^A sont les composantes classiques de la vitesse spatiale d'une particule.

Les parties principales des seconds membres s'écrivent :

$$(H)^{oo} = \frac{2\pi}{c}\,\frac{\mu^2}{\rho} + 0\,(1/c^3) \qquad (H)^{4A} = \frac{\gamma_o \rho}{c}\,V^A + 0\,(1/c^5)$$

$$(H)^{AB} = \frac{\gamma_o \rho}{c}\,V^A V^B + 0\,(1/c^5) \qquad (H)^{oA} = 2\pi\beta\mu V^A + 0\,(1/c^4)$$

$$(H)^{44} = \frac{\gamma_o \rho}{c} + 0\,(1/c^5) \qquad (H)^{o4} = 2\pi\beta\mu + 0\,(1/c^4)$$

(μ est la densité de charge).

Le coefficient γ_o doit en effet être considéré comme étant d'ordre $1/c^2$, soit : $\gamma_o = \frac{8\pi G}{c^2} = 2\pi\beta^2 c^2$ $\left(\beta = \frac{\beta_o}{c},\ \beta_o^2 = 4G\right)$

Egalons les parties principales des composantes de mêmes indices dans les deux membres, il vient :

(o,o) $\quad -\frac{1}{2}\Delta\Lambda^{oo} = 2\pi\frac{\mu^2}{\rho}$; $\quad (4,A)$ $\quad -\frac{1}{2}\Delta\alpha_{4A} = 8\pi G\rho V^A$

(A,B) $\quad -\frac{1}{2}\Delta\Lambda^{AB} = o$; $\quad (o,A)$ $\quad +\frac{1}{2}\Delta\alpha_{oA} = 2\pi\beta_o\mu V^A$

$(4,4)$ $\quad -\frac{1}{2}\Delta\Lambda^{44} = 8\pi G\rho$; $\quad (o,4)$ $\quad -\frac{1}{2}\Delta\alpha_{o4} = 2\pi\beta_o\mu$

Soient U le potentiel newtonnien classique défini par :

$$\Delta U = -\frac{\chi_o \rho c^2}{2} = -4\pi G\rho ,$$

et Q le potentiel relatif à la densité $\frac{\mu^2}{\rho}$;

$$\Delta Q = -4\pi\frac{\mu^2}{\rho}$$

Les potentiels étant supposés réguliers dans tout l'espace, les composantes du vecteur φ sont définies par :

$$\Delta\varphi_A = -4\pi\mu V^A \quad , \quad \Delta\varphi_4 = 4\pi\mu .$$

il vient :

$$\alpha_{oo} = \frac{1}{3}U + \frac{1}{6}Q \quad ; \quad \alpha_{4A} = \sum_a 4\, u_a V_a^A$$

$$\alpha_{AB} = 2\delta_A^B(\alpha_{oo} - U) \quad ; \quad \alpha_{oA} = -\beta_o\varphi_A$$

$$\alpha_{44} = -2U - 2\alpha_{oo} \quad ; \quad \alpha_{o4} = -\beta_o\varphi_4$$

d'où les solutions :

$$(II-5)\quad \begin{cases} \gamma_{oo} = -1 - \frac{4}{c^2}\left(\frac{U}{3} + \frac{Q}{6}\right) + O\left(\frac{1}{c^4}\right) \\ \gamma_{AB} = -\delta_A^B + \frac{2}{c^2}\delta_A^B(\alpha_{oo} - U) + O\left(\frac{1}{c^4}\right) \\ \gamma_{44} = c^2 - 2U - 2\alpha_{oo} + O\left(\frac{1}{c^2}\right) \\ \gamma_{4A} = \frac{\sum_a 4\, u_a V_a^A}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right) \\ \gamma_{oA} = -\frac{\beta_o\varphi_A}{c^3} + O\left(\frac{1}{c^5}\right) \\ \gamma_{o4} = -\frac{3\varphi_4}{c^3} + O\left(\frac{1}{c^3}\right) \end{cases}$$

la sommation $\sum_a$ indique que la distribution matérielle est supposée être constituée de n corps affectés d'un indice a variant de 1 à n.

u_a est le potentiel défini par le corps (a) $(U = \sum_a u_a)$.

Les potentiels de la métrique quotient de V_4 sont définis par :

$$g_{ij} = \gamma_{ij} - \frac{\gamma_{oi}\ \gamma_{oj}}{\gamma_{oo}}$$

On constate que les développements limités des g_{ij} et γ_{ij} ne diffèrent pas en première approximation.

Nous pouvons donc écrire :

$$(II-6)\quad \begin{cases} g_{AB} = -\delta_A^B + \dfrac{2}{c^2}(\alpha_{oo} - U)\ \delta_A^B + 0\,(1/c^4) \\ g_{4A} = \dfrac{\sum_a 4\,u_a\,V_a^A}{c^2} + 0\,(1/c^4) \\ g_{44} = c^2 - 2U - 2\,\alpha_{oo} + 0\,(1/c^2) \end{cases}$$

Ces potentiels se réduisent aux expressions classiques si l'on efface la contribution du quinzième potentiel unitaire (c'est-à-dire si l'on prend $\xi = 1$, soit $\alpha_{oo} = o$) ; ceci était a priori prévisible puisque nous obtenons dans ce cas la théorie de Kaluza-Klein.

Par contre il n'en est pas de même si, dans le cadre de la théorie de Jordan-Thiry, nous effaçons simplement le terme Ω ce qui revient à considérer un schéma gravitationnel pur ; il vient en effet

$$\alpha_{oo} = \frac{U}{3}\ .$$

C'est cette difficulté qui a conduit Mme Hennequin à munir l'espace quotient d'une nouvelle métrique dite conforme, métrique que nous avons présentée au chapitre précédent.

Un calcul simple montre que les potentiels conformes ($\overset{*}{g}_{ij} = \xi\ g_{ij}$) coïncident avec les potentiels relativistes, du moins en première approximation.

$$(II-7)\qquad \begin{cases} \overset{*}{g}_{AB} = -\delta_A^B - \dfrac{2}{c^2}\delta_A^B U + O\left(\dfrac{1}{c^4}\right) \\ \overset{*}{g}_{4A} = \dfrac{\sum_a 4\mu_a V_a^A}{c^2} + O\left(\dfrac{1}{c^4}\right) \\ \overset{*}{g}_{44} = c^2 - 2U + O\,(1/c^2) \end{cases}$$

Nous nous proposons, au chapitre suivant, d'effectuer un calcul en seconde approximation pour constater qu'il est possible de prolonger cette coïncidence entre potentiels conformes et potentiels relativistes.

(B)

Calculs en seconde approximation .

1. Généralités.

Des expressions approchées (II - 7) des potentiels conformes, nous ne pouvons pas déduire le coefficient du terme en $1/c^2$ dans le développement du ds^{*2} conforme. En effet, le potentiel g^{*}_{44} n'est pas déterminé avec assez de précision par les seuls calculs de la première approximation.

Le but d'une seconde approximation sera donc de déterminer ce coefficient. Pour cela nous évaluerons les développements des premiers et seconds membres des équations d'Einstein poussés à l'ordre supérieur.

2. Expression du potentiel g^{*}_{44}.

Nous écrivons a priori les développements des densités tensorielles $\Gamma^{\alpha\beta}$. Tenant compte des résultats précédents déterminant les quantités $\Lambda^{\alpha\beta}$, nous désignons par $\Omega^{\alpha\beta}$ les coefficients des nouveaux termes introduits. Il vient :

$$\Gamma^{oo} = -c + \frac{\Lambda^{oo}}{c} + \frac{\Omega^{oo}}{c^3} + O\left(\frac{1}{c^5}\right) \quad \text{où} \quad \Lambda^{oo} = c$$

$$\Gamma^{oA} = \frac{\Lambda^{oA}}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right) \quad " \quad \Lambda^{oA} = \beta_0 \varphi_A$$

$$\Gamma^{o4} = \frac{\Lambda^{o4}}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right) \quad " \quad \Lambda^{o4} = -\beta_0 \varphi_4$$

$$\Gamma^{AB} = -c\,\delta^{AB} + \frac{\Omega^{AB}}{c^3} + O\left(\frac{1}{c^5}\right) \quad " \quad \Lambda^{AB} = o$$

$$\Gamma^{4A} = \frac{\Lambda^{4A}}{c^3} + O\left(\frac{1}{c^5}\right) \quad " \quad \Lambda^{4A} = \alpha_{4A}$$

$$\Gamma^{44} = \frac{1}{c} + \frac{\Lambda^{44}}{c^3} + \frac{\Omega^{44}}{c^5} + O\left(\frac{1}{c^7}\right) \quad " \quad \Lambda^{44} = 4U$$

Remarquons que seules les composantes d'indices (oo) (AB) (44) sont

évaluées avec une précision supérieure à celle de la première approximation. Nous constaterons en effet qu'il est inutile d'envisager un développement en seconde approximation des composantes d'indices (o, A) (o, 4) (4, A) puisque nous désirons seulement calculer un développement de g^*_{44}.

Un calcul simple permet d'écrire les relations :

$$|\Gamma^{\alpha\beta}| = \gamma^{\frac{3}{2}} \quad , \quad \gamma_{\alpha\beta} = \gamma^{-1} \overline{\Gamma}^{\alpha\beta} \, ,$$

$\overline{\Gamma}^{\alpha\beta}$ désignant le complément algébrique du terme $\Gamma^{\alpha\beta}$ dans le développement du déterminant $|\Gamma^{\alpha\beta}|$

Le calcul du déterminant fournit :

$$\gamma^{\frac{3}{2}} = c^3 + 6\,(U - \chi_{oo})\,c + (\Omega^{44} - \Omega^{pp} - 24\,U\,\chi_{oo} + 8\,U^2 + \beta_o^2 \varphi_4^2)\ldots$$

$$\ldots \frac{1}{c} + o\left(\frac{1}{c^3}\right), \quad \text{ayant posé } \Omega^{pp} = \Omega^{oo} + \Omega^{11} + \Omega^{22} + \Omega^{33}.$$

Il nous sera utile d'écrire le développement de γ^{-1}, soit :

$$\gamma^{-1} = \frac{1}{c^2}\left[1 + \frac{4}{c^2}(\chi_{oo} - U) + \left(\frac{2}{3}\Omega^{AA} - \frac{2}{3}\Omega^{44} + 20\,\chi_{oo}^2 - 24\,U\chi_{oo} + \frac{44}{3}U^2 \ldots\right.\right.$$

$$\left.\left. \ldots - \frac{2}{3}\beta_o^2\varphi_4^2\right)\frac{1}{c^4} + o\left(\frac{1}{c^6}\right)\right]$$

<u>Calcul de</u> ξ

Considérons le complément algébrique de Γ^{oo} :

$$\overline{\Gamma}^{oo} = -c^2 - 4U + \frac{1}{c^2}\left(\Omega^{AA} - \Omega^{44}\right) + o\left(\frac{1}{c^4}\right)$$

$$\left(\Omega^{AA} = \Omega^{11} + \Omega^{22} + \Omega^{33}\right)$$

On en déduit :

$$\gamma_{oo} = -1 - \frac{4}{c^2}\chi_{oo} + \left[\frac{\Omega^{AA} - \Omega^{44}}{3} - \frac{2}{3}\Omega^{oo} + \frac{2}{3}\beta_o^2\varphi_4^2 - 20\,\chi_{oo}^2 \ldots\right.$$

$$\left. \ldots + 8\,\chi_{oo}U + \frac{4}{3}U^2\right]\frac{1}{c^4} + o\left(\frac{1}{c^6}\right)$$

soit $(\xi^2 = -\gamma_{oo})$

$$\xi = 1 + \frac{2\chi_{oo}}{c^2} + \left[\frac{\Omega^{44} - \Omega^{AA}}{6} + \frac{1}{3}\Omega^{oo} - \frac{1}{3}\beta_o^2\varphi_4^2 + 8\,\chi_{oo}^2 \ldots\right.$$

$$\left. \ldots - 4\,\chi_{oo}U - \frac{2}{3}U^2\right]\frac{1}{c^4} + o\left(\frac{1}{c^6}\right)$$

<u>Calcul de</u> g^*_{44}

De la même façon envisageons le complément algébrique de Γ^{44} :

$$\overline{\Gamma}^{44} = c^4 + c^2\,(2\,U - 6\,\chi_{oo}) - \Omega^{pp} + o\left(\frac{1}{c^2}\right).$$

Il vient :

$$\gamma'_{44} = c^2 - 2U - 2\alpha_{00} + \frac{1}{c^2}\left[-\frac{1}{3}\Omega^{pp} - \frac{2}{3}\Omega^{44} - 4\alpha_{00}^2 + 8\alpha_{00}U + \frac{20}{3}U^2 - \frac{2}{3}\beta_0^2\varphi_4^2\right] \ldots$$
$$\ldots + o\left(\frac{1}{c^4}\right)$$

Le potentiel g_{44} de la métrique quotient ds^2 s'écrit :

$$g_{44} = \gamma_{44} - \frac{(\gamma_{04})^2}{\gamma_{00}} = \gamma_{44} + \frac{\beta_0^2\varphi_4^2}{c^2} + o\left(\frac{1}{c^4}\right).$$

Soit :

$$g_{44} = c^2 - 2U - 2\alpha_{00} + \left(-\frac{1}{3}\Omega^{pp} - \frac{2}{3}\Omega^{44} - 4\alpha_{00}^2 + 8\alpha_{00}U + \frac{20}{3}U^2 + \frac{1}{3}\beta_0^2\varphi_4^2\right)\frac{1}{c^2}$$
$$\ldots + o\left(\frac{1}{c^4}\right)$$

Aucune simplification n'apparaît, l'expression de g_{44} présente la même complexité que celle de γ_{44}. Envisageons maintenant le développement du potentiel conforme $g^*_{44} = \xi\, g_{44}$, de remarquables simplifications ont lieu, il reste :

$$(II - 8) \qquad g^*_{44} = c^2 - 2U + \left(6U^2 - \frac{\Omega^{AA} + \Omega^{44}}{2}\right)\frac{1}{c^2} + o\left(\frac{1}{c^4}\right).$$

Remarquons la disparition des termes en α_{00}^2 et en $\alpha_{00}U$; a priori ces termes peuvent intervenir encore dans l'expression de la somme $\Omega^{AA} + \Omega^{44}$, nous constaterons qu'il n'en est rien : le potentiel conforme g^*_{44} sera ainsi indépendant de α_{00} c'est-à-dire du potentiel Ω signalé lors de la première approximation.

Le calcul complet de la seconde approximation du potentiel g^*_{44} exige la détermination de la somme $\Omega^{AA} + \Omega^{44}$, ces coefficients seront déterminés en écrivant que les équations d'Einstein sont vérifiées en seconde approximation.

3. Calcul des premiers membres des équations.

Remarquons que l'expression (II - 8) du potentiel g^*_{44} ne fait pas intervenir le coefficient Ω^{00} (coefficient qui figurait explicitement dans les développements de γ_{44} et g_{44}). Nos calculs ne feront donc pas intervenir

la quinzième équation relative aux indices (o, o).

Il suffit donc de calculer les premiers membres pour les indices (A, A) et (4, 4) - (A = 1, 2, 3) -

Reportons-nous à (II-3), expression , en coordonnées isothermes adaptées, de la densité tensorielle du premier membre.

- Calcul de $S^{AA}\sqrt{\gamma}$

Nous effectuons par exemple le calcul de $S^{11}\sqrt{\gamma}$, les expressions de $S^{22}\sqrt{\gamma}$ et $S^{33}\sqrt{\gamma}$ s'en déduisent en permutant simplement les indices.

Examinons séparément les divers termes constituant ce premier membre et retenons les coefficients des termes en $1/c^3$ dans leurs développements respectifs.

$$\frac{1}{2}\ \gamma^{ij}\ \partial_{ij}\ \Gamma^{11},$$

$$\frac{1}{2}\ \gamma^{ij}\,\partial_{ij}\,\Gamma^{11} = -\frac{1}{2}\,\delta^{B}_{A}\,\partial_{AB}\,\frac{\Omega^{11}}{c^3} + o\left(\frac{1}{c^5}\right) = -\frac{1}{2c^3}\,\Delta\Omega^{11} + o\left(\frac{1}{c^5}\right)$$

d'où la contribution $-\frac{1}{2\,c^3}\,\Delta\Omega^{11}$.

$$-\ \gamma^{ij}\ \Gamma_i\ \partial_j\,\Gamma^{11},$$

Rappelons que $\Gamma_i = \partial_i \operatorname{Log}\sqrt{\gamma} = o\left(\frac{1}{c^2}\right)$;

donc $$-\ \gamma^{ij}\,\Gamma_i\,\partial_j\,\Gamma^{11} = o\left(\frac{1}{c^5}\right),$$

sans contribution.

$$-\sqrt{\gamma}\ \Gamma^{1}_{\lambda\mu}\ \Gamma^{1}_{\nu\rho}\ \gamma^{\lambda\nu}\ \gamma^{\mu\rho},$$

Les symboles de Christoffel sont tous d'ordre $1/c^2$ au moins sauf Γ^{A}_{44} et Γ^{A}_{o4} . Nous avons en effet :

$$\Gamma^{A}_{44} = \gamma^{A\lambda}\left[44, \lambda\right] = -\,\partial_A U - \partial_A \chi_{oo} + o\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

$$\Gamma^{A}_{o4} = \gamma^{A\lambda}\left[o4, \lambda\right] = \frac{1}{2}\,\gamma^{A\lambda}\left(\partial_4\,\gamma_{o\lambda} - \partial_\lambda\,\gamma_{o4}\right) = -\frac{3_o}{2c}\,\partial_A\,\varphi_4 + o\left(\frac{1}{c^3}\right)$$

Les seuls termes susceptibles d'intervenir s'écrivent :

$$-\sqrt{g}\left[\left(\Gamma^1_{44}\right)^2\left(\gamma^{44}\right)^2+\left(\Gamma^1_{00}\right)^2\left(\gamma^{00}\right)^2+2\,\Gamma^1_{oi}\,\Gamma^1_{oj}\,\gamma^{00}\gamma^{ij}+\Gamma^1_{AB}\,\Gamma^1_{CD}\,\gamma^{AC}\gamma^{BD}\right]$$

On obtient aisément :

$$\Gamma^A_{00} = -\frac{2}{c^2}\,\partial_A \gamma_{00} + O\left(\frac{1}{c^4}\right)$$

$$\Gamma^A_{BC} = -\frac{1}{2c^2}\left(\partial_B \gamma_{AC} + \partial_C \gamma_{AB} - \partial_A \gamma_{BC}\right) + O\left(\frac{1}{c^4}\right)$$

$$\Gamma^A_{oi} = -\frac{1}{2}\left(\partial_i \gamma_{oA} - \partial_A \gamma_{oi}\right) + O\left(\frac{1}{c^5}\right)$$

Ainsi que nous l'avons signalé en (II - A - paragraphe 3) les potentiels γ_{oA} et γ_{o4} sont respectivement d'ordre $1/c^3$ et $1/c$. Dans les expressions des symboles Γ^A_{oi}, les dérivées partielles de ces potentiels donnent des contributions d'ordres distincts. Nous devrions théoriquement ne retenir que les termes d'ordre convenable (c'est-à-dire provenant du seul potentiel $\gamma_{\bullet 4}$) ; cependant effectuons certaines remarques :

- Ces expressions font intervenir de façon formelle les composantes du tenseur électromagnétique F_{ij} ; négliger les contributions provenant des potentiels γ_{oA} aurait l'inconvénient de détruire l'antisymétrie des composantes.

- Nous constaterons que, dans l'expression du potentiel g^*_{44} (cf. II - 15), la contribution globale de ces termes permet de mettre en évidence la densité d'énergie $E^2 + H^2$ provenant du champ électromagnétique.

Les densités d'énergie E^2 et H^2 provenant respectivement des champs électrique et magnétique ont des ordres distincts vis à vis de $1/c$. Sous certaines hypothèses physiques (en un point éloigné des masses chargées), il est cependant classique de considérer ces densités comme égales numériquement. Il en résulte que l'ordre par rapport à $1/c$ ne peut plus être considéré comme seul critère de petitesse lorsque les phénomènes gravitationnel et électromagnétique interviennent simultanément.

Nous supposerons toujours que les termes de gravitation sont prépondérants ; nous conserverons néanmoins les premières contributions des termes purement électromagnétiques, ceci quels que soient leurs ordres vis à vis de $1/c$. Nous pourrions ainsi évaluer quelle influence pourraient avoir les termes électromagnétiques dans l'étude effective d'un schéma chargé.

Compte tenu de ces considérations, nous écrivons pour $S^{11}\sqrt{\gamma}$ la contribution :

$$-\frac{1}{c^3}\left(\partial_1 U + \partial_1 \alpha_{00}\right)^2 - \frac{4}{c^3}\left(\partial_1 \alpha_{00}\right)^2 - \frac{1}{4c^3}\left(\partial_A \alpha_{1B} + \partial_B \alpha_{1A} - \partial_1 \alpha_{AB}\right)^2 \cdots$$
$$\cdots - \frac{\beta_0^2}{2c^3}\left(\partial_A \frac{\varphi_1}{c} - \partial_1 \frac{\varphi_A}{c}\right)^2 + \frac{\beta_0^2}{2c^3}\left(\frac{\partial_4 \varphi_1}{c^2} - \partial_1 \varphi_4\right)^2 .$$

- Calcul de $\sum$.

- $\frac{1}{2}\gamma^{ij}\Gamma_i^1\Gamma_j^1$,

on obtient : $\Gamma_i^1 = \frac{2}{c^2}\left(\partial_i U - \partial_i \alpha_{00}\right) + O\left(\frac{1}{c^4}\right)$,

d'où la contribution : $-\frac{2}{c^4}\left(\partial_A U - \partial_A \alpha_{00}\right)^2$.

- $\frac{1}{4}\Gamma_{\lambda\mu}^i \partial_i \gamma^{\lambda\mu}$,

Les seuls termes à retenir sont :

$$\frac{1}{4}\left[\Gamma_{00}^i \partial_i \gamma^{00} + \Gamma_{44}^i \partial_i \gamma^{44} + \Gamma_{AB}^i \partial_i \gamma^{AB} + 2\,\Gamma_{0A}^i \partial_i \gamma^{0A} + 2\,\Gamma_{04}^i \partial_i \gamma^{04}\right].$$

Ainsi que nous l'avons précisé ci-dessus nous retiendrons systématiquement les termes, construits avec les composantes φ_i, relevant de l'approximation supérieure.

Ecrivons les contributions partielles :

$\frac{1}{4}\Gamma_{00}^i \partial_i \gamma^{00}$ ..... $-\frac{2}{c^4}\left(\partial_A \alpha_{00}\right)^2$,

$\frac{1}{4}\Gamma_{44}^i \partial_i \gamma^{44}$ ..... $-\frac{1}{2c^4}\left(\partial_A U + \partial_A \alpha_{00}\right)^2$

$\frac{1}{4}\Gamma_{AB}^i \partial_i \gamma^{AB}$ ..... $\frac{1}{8c^4}\partial_i \alpha_{AB}\left(\partial_A \alpha_{iB} + \partial_B \alpha_{iA} - \partial_i \alpha_{AB}\right)$

$\frac{1}{2}\Gamma_{0A}^i \partial_i \gamma^{0A}$ ..... $\frac{\beta_0^2}{4c^6}\left(\partial_4 \frac{\varphi_A}{c^2} - \partial_A \varphi_4\right)\partial_4 \varphi_A + \cdots$

$$\left\{ \cdots + \frac{\beta_0^2}{4c^6}\left(\partial_A \varphi_B - \partial_B \varphi_A\right)\partial_B \varphi_A \right.,$$

$$\frac{1}{2}\Gamma^{i}_{04}\,\partial_i\gamma^{04} \quad \cdots\cdots \quad \frac{\beta_0^2}{4c^4}\left(\partial_A\varphi_4-\partial_4\frac{\varphi_A}{c^2}\right)\partial_A\varphi_4 .$$

Tenant compte de la réduction :

$$\frac{1}{8}\,\partial_C\alpha_{AB}\left(\partial_A\alpha_{CB}+\partial_B\alpha_{CA}-\partial_C\alpha_{AB}\right)=-\frac{1}{2}\left(\partial_A\alpha_{00}-\partial_A U\right)^2 .$$

Nous obtenons

$$\Sigma = \frac{1}{c^4}\left[-3\left(\partial_A U\right)^2-5\left(\partial_A\alpha_{00}\right)^2+4\,\partial_A U\,\partial_A\alpha_{00}+\frac{\beta_0^2}{4}\left(\partial_A\varphi_4-\partial_4\frac{\varphi_A}{c^2}\right)^2 \cdots\right.$$
$$\left.\cdots-\frac{\beta_0^2}{8c^2}\left(\partial_A\varphi_B-\partial_B\varphi_A\right)^2\right]+O\left(\frac{1}{c^6}\right).$$

Nous pouvons expliciter l'expression du premier membre en groupant les différents termes :

$$S^{11}\sqrt{\gamma} = \frac{1}{c^3}\left[-\frac{1}{2}\Delta\Omega^{11}-\left(\partial_1 U+\partial_1\alpha_{00}\right)^2-4\left(\partial_1\alpha_{00}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\partial_A\alpha_{1B}\cdots\right.\right.$$
$$\left.\cdots+\partial_B\alpha_{1A}-\partial_1\alpha_{AB}\right)^2-\frac{\beta_0^2}{2c^2}\left(\partial_A\varphi_1-\partial_1\varphi_A\right)^2+\frac{\beta_0^2}{2}\left(\partial_1\varphi_4-\partial_4\frac{\varphi_1}{c^2}\right)^2+3\left(\partial_A U\right)^2$$
$$\left.+5\left(\partial_A\alpha_{00}\right)^2-4\,\partial_A U\,\partial_A\alpha_{00}-\frac{\beta_0^2}{4}\left(\partial_2\varphi_4-\partial_4\frac{\varphi_A}{c^2}\right)^2+\frac{\beta_0^2}{8c^2}\left(\partial_A\varphi_B-\partial_B\varphi_A\right)^2\right]+O\left(\frac{1}{c^5}\right).$$

Sommons de 1 à 3, il vient :

$$S^{AA}\sqrt{\gamma} = \frac{1}{c^3}\left[-\frac{1}{2}\Delta\Omega^{AA}-\left(\partial_A U+\partial_A\alpha_{00}\right)^2-4\left(\partial_A\alpha_{00}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\partial_A\alpha_{CB}\cdots\right.\right.$$
$$\left.\cdots+\partial_B\alpha_{AC}-\partial_C\alpha_{AB}\right)^2-\frac{\beta_0^2}{2c^2}\left(\partial_A\varphi_B-\partial_B\varphi_A\right)^2+\frac{\beta_0^2}{2}\left(\partial_A\varphi_4-\partial_4\frac{\varphi_A}{c^2}\right)^2+9\left(\partial_A U\right)^2$$
$$\left.+15\left(\partial_A\alpha_{00}\right)^2-12\,\partial_A U\,\partial_A\alpha_{00}-\frac{3\beta_0^2}{4}\left(\partial_B\varphi_4-\partial_4\frac{\varphi_B}{c^2}\right)^2+\frac{3\beta_0^2}{8c^2}\left(\partial_A\varphi_B-\partial_B\varphi_A\right)^2\right]+O\left(\frac{1}{c^5}\right).$$

Finalement nous obtenons toutes réductions faites :

(II - 9)

$$S^{AA}\sqrt{\gamma} = \frac{1}{c^3}\left[-\frac{1}{2}\Delta\Omega^{AA}+\left(\partial_A U\right)^2+3\left(\partial_A\alpha_{00}\right)^2\cdots\right.$$
$$\left.\cdots-\frac{\beta_0^2}{4}\left(\partial_A\varphi_4-\partial_4\frac{\varphi_A}{c^2}\right)^2-\frac{\beta_0^2}{8c^2}\left(\partial_A\varphi_B-\partial_B\varphi_A\right)^2\right]+O\left(\frac{1}{c^5}\right).$$

- Calcul de $S^{44}\sqrt{\gamma}$.

La partie principale de cette composante est d'ordre $1/c^3$; nous retiendrons en seconde approximation les termes d'ordre $1/c^5$ (termes de gravitation) ou d'ordre supérieur (termes électromagnétiques relatifs à φ).

$$\cdot + \frac{1}{2}\gamma^{ij}\partial_{ij}\Gamma^{44} = \frac{1}{2}\left[-\zeta^B_H - \frac{2\zeta^B_A}{c^2}(\chi_{00}-U)\right]\left[\frac{4\partial_{AB}U}{c^3} + \frac{1}{c^5}\partial_{AB}\Omega^{44}\right] + \frac{1}{2c^2}\partial_{44}\frac{4U}{c^3}\cdot\cdot$$
$$\cdot\cdot + o\left(\frac{1}{c^7}\right),$$

d'où la contribution : $-\frac{2\Delta U}{c^3} + \frac{1}{c^5}\left[-\frac{1}{2}\Delta\Omega^{44} + 4(U-\chi_{00})\Delta U + 2\partial_{44}U\right]$.

$$\cdot \quad -\gamma^{ij}\Gamma^i_{\cdot}\partial_j\Gamma^{44} = 4\Gamma^A\frac{\partial_A U}{c^3} + o\left(\frac{1}{c^7}\right),$$

contribution : $\frac{8}{c^5}\left(\partial_A U - \partial_A\chi_{00}\right)\partial_A U$.

$$\cdot \quad -\sqrt{\gamma}\,\Gamma^4_{\lambda\mu}\Gamma^4_{\nu\rho}\gamma^{\lambda\nu}\gamma^{\mu\rho},$$

Les seuls termes à retenir sont :

$$-2\sqrt{\gamma}\left[\Gamma^4_{0A}\Gamma^4_{0B}\gamma^{00}\gamma^{AB} + \Gamma^4_{4A}\Gamma^4_{4B}\gamma^{44}\gamma^{AB}\right],$$

nous avons : $\Gamma^4_{4A} = -\frac{1}{c^2}\left(\partial_A U + \partial_A\chi_{00}\right) + o\left(\frac{1}{c^4}\right)$.

Tenant compte du calcul précédent de $\sum$, il vient :

$$(\text{II - 10})\quad S^{44}\sqrt{\gamma} = -\frac{2\Delta U}{c^3} + \frac{1}{c^5}\left[-\frac{1}{2}\Delta\Omega^{44} + 4(U-\chi_{00})\Delta U + 2\partial_{44}U\cdot\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\cdot - 3\left(\partial_A\chi_{00}\right)^2 + 7\left(\partial_A U\right)^2 - \frac{\beta_0^2}{8}\left(\partial_A\varphi_B - \partial_B\varphi_B\right)^2 - \frac{\beta_0^2}{4}\left(\partial_A\varphi_4 - \partial_4\frac{\varphi_A}{c^2}\right)^2\right] + o\left(\frac{1}{c^7}\right).$$

Ayant pour but le calcul de la somme $\Omega^{AA} + \Omega^{44}$, nous pouvons envisager la combinaison $(c^3\ S^{AA} + c^5\ S^{44})\sqrt{\gamma}$, soit $(c^3\ S^{AA} + c^5\ldots$
$\ldots\ S^{44})\sqrt{\gamma} = -2c^2\Delta U + \left[-\Delta\frac{\Omega^{AA}+\Omega^{44}}{2} + 4(U-\chi_{00})\Delta U\right.$
$\left. + 2\partial_{44}U + 8\left(\partial_A U\right)^2 - \frac{\beta_0^2}{2}\left(\partial_A\varphi_4 - \frac{1}{c^2}\partial_4\varphi_A\right)^2 - \frac{\beta_0^2}{4}\left(\partial_A\varphi_B - \partial_B\varphi_A\right)^2\right] + o\left(\frac{1}{c^2}\right).$

Remarquons la disparition du terme $(\partial_A \gamma_{oo})^2$. Le quinzième potentiel γ_{oo} intervient seulement dans l'expression $-4\gamma_{oo}\Delta U$, nous constaterons en évaluant les seconds membres que ce terme s'évanouit également.

4. Calcul des seconds membres des équations.

Remarque.

Alors que le calcul des composantes de la densité tensorielle $S^{\alpha\beta}\sqrt{\gamma}$ ne présente aucune difficulté, le calcul des seconds membres s'avère plus délicat. En effet le tenseur énergétique pentadimensionnel étant choisi a priori, il nous faut interpréter ses composantes et en particulier les équations de conservation qui en résultent.

Dans ce chapitre nous effectuons le calcul de la seconde approximation en conservant exactement les hypothèses de Mme Hennequin, c'est-à-dire :

- Le tenseur énergétique pentadimensionnel choisi généralise formellement le tenseur relativiste du schéma matière pure.

- L'interprétation des résultats s'effectue en métrique conforme de V_4.

Dans le chapitre suivant nous mettrons en évidence les difficultés soulevées par cette interprétation et nous montrerons qu'il est possible de les éviter en faisant choix d'un tenseur second membre plus complet.

Rappelons brièvement certains résultats classiques ; le tenseur énergétique ayant pour expression :

$$\Theta_{\alpha\beta} = \rho v_\alpha v_\beta ,$$

l'étude des équations correspondantes en repères orthonormés de la variété V_4 munie de la métrique conforme conduit à expliciter r par la relation :

$$r = \frac{\gamma_0 \rho \xi}{1 + \frac{k^2}{\xi^2}} , \qquad (II - 11)$$

On constate en effet - cf équations (I - 10) - que cette relation permet de retrouver en second membre le tenseur relativiste et par conséquent d'obtenir un coefficient de gravitation constant (indépendant de ξ) égal au coefficient classique χ_0 .

Considérons par ailleurs l'expression d'une densité énergétique m^* évaluée en termes de V_4 munie de la métrique conforme, soit :

(II - 12) $$m^* = \rho \frac{dt}{ds^*} \sqrt{-g^*} .$$

Ce scalaire est numériquement égal (à une troisième approximation près) à la densité d'énergie envisagée en relativité générale. Nous avons en effet :

$$m^* = \rho \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} v^2 + 3U \right) + 0 (1/c^4) \right] .$$

Néanmoins l'équation de continuité (cf. I - paragraphe 3) nous apprend que seule l'expression :

$$n = r\, v^4 \sqrt{\gamma} = \frac{\chi_0 m^* \sqrt{\xi}}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{\xi^2}}} ,$$

est conservée le long des lignes de courant de V_4.

Nous préciserons le potentiel U en écrivant que celui-ci se trouve déterminé par l'équation de Poisson relative à la densité m^* , soit :

(II - 13) $$\Delta U = - \frac{\chi_0 m^* c^2}{2} .$$

Cette modification du second ordre dans la détermination de U n'altère évidemment pas le calcul en première approximation des potentiels. Il en résulte que les calculs formels des premiers membres $S^{\alpha\beta} \sqrt{\gamma}$ restent valables si l'on considère U défini par (II - 13) ce que nous ferons dans la suite.

Les composantes d'indices (4, 4) (A, B) de la densité tensorielle $(H)^{\alpha\beta}$ s'expriment aisément en fonction de n, il vient :

$$(H)^{44} = n\, v^4$$

$$(H)^{AB} = n\, v^4\, v^A v^B = (H)^{44}\, v^A v^B .$$

Remarquons que seule la composante d'indice (4, 4) doit être calculée en seconde approximation, les composantes relatives aux indices (A, B) n' intervenant que par leurs parties principales.

Il vient : $(H)^{44} = -\frac{2\,\Delta U}{c^2}\sqrt{\xi}\,\frac{dt}{ds}$.

Finalement nous obtenons les développements :

$$(H)^{44} = -2\,\frac{\Delta U}{c^3}\left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + U + 2\alpha_{oo}\right) + 0\,(1/c^4)\right]$$

$$(H)^{AB} = -2\,\frac{\Delta U}{c^3}\,v^A v^B + 0\,(1/c^5).$$

Sommons la dernière équation par rapport à l'indice A = 1, 2, 3 :

$$(H)^{AA} = -2\,\frac{\Delta U}{c^3}\,v^2 + 0\left(\frac{1}{c^5}\right)$$

Formons la combinaison $c^3 (H)^{AA} + c^5 (H)^{44}$:

$$c^3 (H)^{AA} + c^5 (H)^{44} = -2c^2 \Delta U - 3 v^2 \Delta U - 2 \Delta U.(U + 2\alpha_{oo}) + o\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

Egalons le développement ci-dessus à celui du premier membre correspondant obtenu au paragraphe 3. Les parties principales sont évidemment les mêmes, il reste la relation :

$$(\text{II} - 14)\quad \frac{1}{2}\Delta\left(\Omega^{AA} + \Omega^{44}\right) = 2\,\partial_{44} U + 6\,U\,\Delta U + 8\,(\partial_A U)^2 \ldots$$

$$\ldots + 3\,v^2 \Delta U - \frac{\beta_0^2}{2}\left(\partial_A \varphi_4 - \frac{1}{c^2}\partial_4 \varphi_A\right)^2 - \frac{\beta_0^2}{4c^2}\left(\partial_A \varphi_B - \partial_B \varphi_A\right)^2 .$$

Remarquons la simplification relative aux termes contenant α_{oo}, ce terme ne figure plus dans l'expression ci-dessus et par conséquent dans l'expression de g^{*}_{44} ainsi qu'il avait été annoncé.

Tenant compte de l'identité :

$$\Delta\,(U^2) = 2\,U\,\Delta U + 2\,(\partial_A U)^2$$

Nous pouvons écrire la relation sous la forme :

$$\frac{1}{2}\Delta\left(\Omega^{AA}+\Omega^{44}\right) = 4\,\Delta(U^2) + 2\,\partial_{44}U - 2U\,\Delta U + 3V^2\Delta U \ldots$$

$$\ldots - \frac{\beta_0^2}{2}\left(\partial_A\varphi_4 - \frac{1}{c^2}\partial_4\varphi_A\right)^2 - \frac{\beta_0^2}{4c^2}\left(\partial_A\varphi_B - \partial_B\varphi_A\right)^2.$$

Posons :

$$\Delta\zeta = \partial_{44}U - U\,\Delta U + \frac{3}{2}V^2\Delta U \,,$$

$$\Delta Z = -\frac{\beta_0^2}{4}\left(\partial_A\varphi_4 - \frac{1}{c^2}\partial_4\varphi_A\right)^2 - \frac{\beta_0^2}{8c^2}\left(\partial_A\varphi_B - \partial_B\varphi_A\right)^2$$

Il vient : $\zeta' = \zeta + Z$

$$\frac{1}{2}\left(\Omega^{AA} + \Omega^{44}\right) = 4\,U^2 + 2\,\zeta'$$

Il suffit de remplacer dans le développement (II - 8) du potentiel g^*_{44} la somme $\frac{\Omega^{AA} + \Omega^{44}}{2}$ par l'expression trouvée, il vient :

$$(\text{II - 15}) \quad g^*_{44} = c^2 - 2U + \frac{2}{c^2}\left(U^2 - \zeta'\right) + o\cdot\left(\frac{1}{c^4}\right)$$

- ζ n'est autre que le terme de gravitation pure obtenu de façon classique en relativité générale.

- Z est un terme spécifique de la théorie de Jordan-Thiry. Les composantes du vecteur φ sont déterminées par les équations [cf. (II - A) paragraphe 3] :

$$\Delta\varphi_A = -4\pi\mu V^A \,, \quad \Delta\varphi_4 = +4\pi\mu \,.$$

Comparons ces équations avec les équations de Maxwell ;

- φ_4 s'identifie exactement au potentiel électrique.

- Par contre il faut diviser les composantes φ_A par c pour retrouver le potentiel vecteur électromagnétique.

Nous poserons :

$$\varphi'_4 = \varphi_4 \quad , \quad \varphi'_A = \frac{1}{c}\varphi_A .$$

Le vecteur φ' est ainsi le potentiel vecteur d'univers de la relativité restreinte.

Z est défini par la relation :

$$\Delta Z = -\frac{\beta_0^2}{4}\left(\partial_A \varphi'_4 - \frac{1}{c}\partial_4 \varphi'_A\right)^2 - \frac{\beta_0^2}{8}\left(\partial_A \varphi'_B - \partial_B \varphi'_A\right)^2 .$$

On reconnaît immédiatement dans l'expression de ΔZ les composantes du tenseur champ électromagnétique, soit :

$$F^{A4} = \partial_A \varphi'_4 - \frac{1}{c}\partial_4 \varphi'_A \quad , \quad F^{AB} = \partial_A \varphi'_B - \partial_B \varphi'_A ,$$

le facteur $1/c$ figurant dans F^{A4} provient du fait que nous avons considéré x^4 comme variable temporelle ($x^4 = t$ et non ct).

Soient (X, Y, Z) , (L, M, N) les composantes des vecteurs d'espace champ électrique et champ magnétique, il vient :

$$\Delta Z = -\frac{\beta_0^2}{4}(X^2 + Y^2 + Z^2) - \frac{\beta_0^2}{8} \times 2\,(L^2 + M^2 + N^2)$$

soient :

$$\Delta Z = -\frac{\beta_0^2}{4}(E^2 + H^2)$$

avec

$$E^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \quad , \quad H^2 = L^2 + M^2 + N^2$$

Le coefficient $\frac{\beta_0^2}{4}$ est exactement la constante G figurant dans la loi d'attraction newtonienne. L'expression $E^2 + H^2$ représente de façon classique l'énergie électromagnétique par unité de volume ; l'équation :

$$\Delta Z = -G\,(E^2 + H^2)$$

conduit donc, moyennant les conditions de régularité, à la solution :

$$Z = \frac{G}{4\pi}\int \frac{E^2 + H^2}{r}\, dv ,$$

l'intégration étant étendue à tout l'espace.

Z représente ainsi, au coefficient $\frac{1}{\varkappa \pi}$ près, un potentiel relatif à la densité d'énergie d'origine électromagnétique.

Supposons maintenant que le schéma considéré est purement gravitationnel ; alors Z = o. Le potentiel conforme est rigoureusement égal au potentiel relativiste ; il en est de même (à une troisième approximation près) du développement du ds^{*2} :

$$ds^{*2} = g^{*}_{ij} \quad dx^i \quad dx^j$$

soit

(II - 16)

$$\frac{ds^{*2}}{dt^2} = c^2 - (V^2 + 2U) + \frac{2}{c^2}(U^2 - \zeta - U V^2 + \varkappa_{4A} V^A) + o(\frac{1}{c^4}).$$

Il est donc possible d'identifier la variété quotient V_4 douée de la métrique conforme de Mme Hennequin avec l'espace-temps de la relativité, cette identification étant réalisée en seconde approximation.

Nous constatons ainsi que la métrique conforme ds^{*} apparaît comme "osculatrice" à la métrique einsteinienne ; ceci dans le cadre d'un schéma gravitationnel pur. Ce fait est très important puisqu'il permet de supposer que nous pourrons rendre compte, en théorie pentadimensionnelle, des effets mécaniques relativistes en seconde approximation (déplacement du périhélie en mécanique céleste).

L'examen des difficultés et la façon de surmonter celles-ci nous conduiront cependant à modifier légèrement le calcul exposé dans ce second chapitre. Nous devrons en effet faire intervenir (en seconde approximation) la contribution résultant de l'hypothèse d'un pouvoir diélectrique variable de l'espace vide, hypothèse propre à la théorie pentadimensionnelle.

CHAPITRE III

Etude critique des équations de mouvement.

1. Etude des équations de mouvement en première approximation.

Il est possible d'aborder l'étude des équations de mouvement de deux façons différentes. Nous pouvons considérer les équations de conservation relatives au tenseur énergétique envisagé :

$$D_\alpha \Theta^\alpha_\beta = 0$$

Ces équations sont équivalentes au système constitué par : l'intégrale première des géodésiques, une équation de continuité, les trois équations ci-dessus envisagées pour les indices $\beta = A = 1, 2, 3$ (Chapitre I, paragraphe 3). Ces trois dernières équations peuvent s'écrire sous la forme simple :

(III - 1) $$\frac{d}{dt} \textcircled{H}^4_A = \frac{1}{2} \partial_A \gamma_{\alpha\beta} \textcircled{H}^{\alpha\beta} \quad ; \quad \textcircled{H}_{\alpha\beta} = \sqrt{\gamma}\, \Theta_{\alpha\beta}$$

On obtient ainsi une généralisation formelle des équations de mouvement relativistes.

Nous pouvons par ailleurs utiliser directement le principe fondamental de descente permettant de passer par projection des géodésiques de la variété riemannienne V_5 aux géodésiques de l'espace de Finsler construit sur la variété V_4.

Ce dernier procédé permet de mettre facilement en évidence une fonction généralisant la fonction classique de Lagrange. En effet, le principe de descente permet d'écrire immédiatement les équations de mouvement d'une particule chargée à l'aide du principe variationnel.

(III - 2) $$\delta \left\{ \int \sqrt{1 + \frac{h^2}{\xi^2}} \cdot \frac{ds^*}{\sqrt{\xi}} + h\beta\varphi \right\} = 0$$

la variation étant envisagée dans V_4, la variable temporelle $x^4 = t$ n'étant pas variée,

(III - 2) s'écrit :

$$\text{(III - 3)} \qquad \delta \left\{ \int L \, dt \right\} = 0$$

On évalue aisément la partie principale de L grâce aux calculs en première approximation des potentiels (Chapitre II - A). Il vient :

$$\text{(III - 4)} \qquad L = \frac{1}{2} V^2 + U + \alpha_{oo} - \frac{\beta_o h}{c\sqrt{1+h^2}} \varphi_i^1 V^i + o\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

Considérons le cas gravitationnel pur, c'est-à-dire par exemple l'étude du mouvement d'un neutron (h = o) en l'absence de champ électromagnétique; les équations s'écrivent :

$$\text{(III - 5)} \qquad \delta \left\{ \int L_G \, dt \right\} = 0$$

avec $$L_G = \frac{1}{2} V^2 + U + \alpha_{oo} + o\left(\frac{1}{c^2}\right).$$

Si nous envisageons le cas particulier de la théorie de Kaluza-Klein ($\xi = 1$ d'où $\alpha_{oo} = o$) nous retrouvons bien la fonction de Lagrange classique. Par contre, si nous considérons le cas gravitationnel pur dans le cadre de la théorie à quinze variables de champ, nous devons simplement annuler Ω, c'est-à-dire prendre $\alpha_{oo} = \frac{U}{3}$.

Ceci conduit à

$$L_G = \frac{1}{2} V^2 + \frac{4}{3} U + o\left(\frac{1}{c^2}\right).$$

Cette expression de la fonction à rendre extrémale est inacceptable; nous devons en effet obtenir la fonction lagrangienne classique ainsi que cela est réalisé en théorie de Kaluza-Klein.

2. Analyse des difficultés.

La principale difficulté est évidemment l'expression incorrecte de la fonction L_G obtenue ci-dessus. Examinons la cause de ce désaccord. Les équations (III - 2) s'écrivent dans l'hypothèse d'un schéma non chargé :

(III - 6) $$\delta \left\{ \int \frac{1}{\sqrt{\xi}} \, ds^* \right\} = 0$$

Nous constatons ainsi que la présence du terme $\frac{1}{\sqrt{\xi}}$ est à l'origine de la difficulté rencontrée : la projection sur l'espace quotient de la trajectoire pentadimensionnelle d'un neutron n'est pas géodésique de la métrique conforme ds^{*2}.

En d'autres termes le principe des géodésiques, principe fondamental de la relativité générale, n'est pas réalisé dans la variété quotient munie de la métrique conforme ; ceci nous empêche d'identifier la variété V_4 munie de sa métrique conforme avec l'espace-temps de la relativité.

Par contre ce même principe des géodésiques se trouve vérifié si l'on attribue la métrique quotient proprement dite à la variété V_4 : la trajectoire d'une particule non chargée est géodésique de la métrique ds^2. Nous avons constaté que cette interprétation était impossible : les potentiels g_{ij} ayant des expressions distinctes des potentiels relativistes.

La difficulté mise ainsi en évidence est capitale puisqu'il s'agit d'un désaccord relatif à des calculs effectués en première approximation ; la fonction lagrangienne est perturbée dans sa partie principale par le terme surabondant α_{00} alors que les variations de ξ sont d'ordre $1/c^2$. Ceci tient au fait suivant : si l'on cherche un développement de la fonction à rendre extrémale il faut effectuer la multiplication des deux développements :

$$\xi^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{\alpha_{00}}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right) ,$$

$$\frac{ds^*}{dt} = c - \frac{1}{c}\left(\frac{1}{2}V^2 + U\right) + O\left(\frac{1}{c^3}\right) .$$

Le premier terme est la constante c ; le terme suivant constitue la partie principale de la fonction lagrangienne ; le coefficient du terme du second ordre dans le développement de ξ aura donc un effet du premier ordre sur les équations de mouvement.

Signalons que cette incohérence, décelée dans le calcul en première approximation des équations de mouvement, ruine a priori les résultats présentés dans le chapitre précédent et relatifs à un calcul en seconde approximation des potentiels. Nous verrons cependant qu'il nous sera possible dans une certaine mesure de préserver la validité de ces calculs tout en obtenant des équations de mouvement correctes.

Nous avons envisagé le cas d'une masse d'épreuve non chargée.

Examinons à présent le cas général : nous devons remplacer α_{oo} par sa valeur, soit $\frac{U}{3} + \frac{\Omega}{6}$, dans l'expression (III - 4) de la fonction à rendre extrémale. Une nouvelle difficulté apparaît:le potentiel Ω relatif à la densité $\frac{\mu^2}{\gamma}$ figure dans la partie principale de la fonction lagrangienne, le terme Ω ne peut pourtant pas recevoir d'interprétation classique et apparaît de ce fait comme caractéristique de la théorie unitaire pentadimensionnelle. Un rapide calcul présenté par Mme Hennequin [5] montre cependant que sa contribution est d'un ordre de grandeur prohibitif en comparaison avec les ordres de grandeur des termes classiques.

Ce terme Ω doit donc être considéré comme un terme parasite. Une synthèse immédiate des deux difficultés signalées ci-dessus (la première étant relative au schéma gravitationnel, la seconde caractérisant un schéma unitaire) permet d'affirmer que les incompatibilités relevées proviennent dans chaque cas de la contribution du coefficient α_{oo} ; cette contribution doit être considérée comme étrangère et dans toute tentative pour obtenir une formulation correcte nous devrons nous employer à la faire disparaître.

Remarquons que, pour cette même raison, le calcul des potentiels en métrique quotient de V_4 est à rejeter ; Mme Hennequin a, en fait, introduit la notion de métrique conforme dans le souci de faire disparaître la contribution du terme α_{oo}. Nous avons remarqué au chapitre II que ce terme disparaissait non seulement en première approximation mais encore dans le calcul en seconde approximation du potentiel conforme g^*_{44}. La notion de métrique conforme se révèle donc très efficace tant qu'il s'agit de calculer les composantes d'un tenseur fondamental que l'on désire assimiler au tenseur relativiste définissant la métrique de l'espace-temps ; par contre le changement de métrique dans V_4 n'influe pas sur les équations de mouvement en première approximation. Les seules modifications éventuelles proviendraient des expressions des densités énergétiques, expressions pouvant différer suivant la métrique considérée ; les modifications correspondantes dans les équations seraient obligatoirement du second ordre.

Notons enfin une troisième difficulté. Nous avons signalé (chapitre (II - B) paragraphe 4) que l'équation de continuité $v\beta \quad D_\alpha \theta^\alpha_\beta = 0$ permet d'affirmer que la quantité :

$$n = \frac{\gamma_0 \, m^* \sqrt{\xi}}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{\xi^2}}} \, ,$$

est conservée le long de chaque ligne de courant de V_4.

Envisageons un schéma gravitationnel pur (h = o), nous constatons que la densité énergétique m^* n'est pas conservée le long des lignes de courant de V_4 ainsi qu'il est réalisé en relativité ; seule l'expression $m^* \sqrt{\xi}$ possède cette propriété ce qui n'est pas susceptible d'être interprété de façon classique.

CHAPITRE IV

Généralisation des schémas matière pure et fluide parfait en théorie unitaire pentadimensionnelle.

(A)

Schéma matière pure généralisé.

1. Généralités.

Les calculs effectués au chapitre II montrent que la coïncidence obtenue entre les potentiels conformes g^{*}_{ij} et les potentiels relativistes peut être prolongée en seconde approximation . Ceci nous incite fortement à poursuivre nos recherches dans le but de faire jouer à l'espace quotient V_4 doué de la métrique conforme le rôle de l'espace-temps relativiste, et cela malgré les difficultés analysées ci-dessus.

Pour qu'il en soit ainsi nous devons faire en sorte que le principe des géodésiques soit vérifié dans l'espace quotient muni de la métrique conforme. Nous posons donc a priori le principe suivant : la trajectoire quadridimensionnelle d'une masse d'épreuve non chargée est géodésique de la métrique de Mme Hennequin.

Nous orientons ainsi nos recherches sur une modification du tenseur second membre de façon à ce que ce tenseur possède la propriété énoncée ci-dessus. Il est naturel de considérer un tenseur possédant le degré de complexité immédiatement supérieur à celui envisagé précédemment, soit un tenseur généralisant le tenseur relativiste du schéma fluide parfait holonome :

(IV - 1) $$\Theta_{\alpha\beta} = r\, v_\alpha v_\beta - k\, \gamma_{\alpha\beta} .$$

Précisons que notre intention est de généraliser à la théorie pentadimensionnelle le schéma matière pure et non, pour l'instant, le schéma fluide parfait ; nous choisissons cependant un tenseur de la forme (IV - 1) puisque le tenseur généralisant formellement le tenseur relativiste du schéma matière pure (correspondant à k = o) ne respecte pas le principe des géodésiques en métrique conforme de V_4.

2. Schéma holonome dans la variété V_5.

Le tenseur adopté étant de la forme (IV - 1), on caractérise le fait que le schéma est holonome [9] dans V_5 en supposant les scalaires r et k

liés par une relation, soit :

$$r = f(k)$$

Dans ces conditions on peut définir un troisième scalaire ϕ par la relation :

(IV - 2) $$\phi = \exp \varepsilon \int_{k_0}^{k} \frac{du}{f(u)}$$

$\varepsilon = \pm 1$ suivant que le vecteur v, tangent à la ligne de courant pentadimensionnelle issue du point considéré, est orienté $d\sigma^2 > 0$ ou $d\sigma^2 < 0$

$$\left(\gamma_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta = \varepsilon \right)$$

ϕ est appelé indice pentadimensionnel du schéma.

On généralise aisément les propriétés du schéma holonome relativiste ; les équations de conservation s'écrivent :

(IV - 3) $$\begin{cases} D_\alpha (\rho v^\alpha) = \rho \, \partial_\alpha (\mathrm{Log}\, \phi) \, v^\alpha \\ v^\alpha D_\alpha v_\beta = \left(\varepsilon \gamma^\alpha_\beta - v^\alpha v_\beta \right) \partial_\alpha (\mathrm{Log}\, \phi) \, . \end{cases}$$

Elles expriment que les lignes de courant pentadimensionnelles sont géodésiques de la variété V_5 munie de la métrique :

(IV - 4) $$d\bar{\sigma}^2 = \phi^2 d\sigma^2 = \bar{\mathcal{L}}^2 du^2 ,$$

$$\bar{\mathcal{L}}^2 = \phi^2 \gamma_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{du} \frac{dx^\beta}{du} .$$

Dans cette nouvelle métrique (dont les potentiels sont $\bar{\gamma}_{\alpha\beta} = \phi^2 \gamma_{\alpha\beta}$) on peut considérer le vecteur $\bar{v}$ de composantes :

$$\bar{v}_\alpha = \phi \, v_\alpha \quad , \quad \bar{v}^\alpha = \bar{\gamma}^{\alpha\beta} \bar{v}_\beta = \frac{1}{\phi} v^\alpha .$$

On observera que le vecteur $\bar{v}$ est unitaire dans la métrique $d\bar{\sigma}$;

$\bar{D}_\alpha$ étant l'opérateur de dérivation covariante associé à la métrique $d\bar{\sigma}$, les équations de conservation s'écrivent :

$$(IV-5) \qquad \bar{v}^{\alpha}\,\bar{D}_{\alpha}\,v_{\beta}=0\,,$$

système auquel il faut ajouter l'équation de continuité :

$$(IV-6) \qquad D_{\alpha}\left(\frac{\rho}{\phi}\,v^{\alpha}\right)=0\,,$$

que nous ne chercherons pas, pour l'instant, à écrire en termes de métrique $d\bar{\sigma}$.

Nous pouvons appliquer formellement le principe de descente aux géodésiques définies par (IV - 5) ; celles-ci, satisfaisant à l'intégrale première :

$$(IV-7) \qquad \partial_0 \bar{S} = \bar{v}_0 = \phi\, v_0 = h \quad , \quad (du = d\bar{\sigma})\,,$$

se projettent sur la variété quotient suivant les extrémales de l'intégrale :

$$(IV-8) \qquad \int \sqrt{1+\frac{h^2}{\phi^2\xi^2}}\; d\bar{s} + \beta_0\, h\, \varphi$$

$d\bar{s}$ étant la métrique quotient définie par le tenseur fondamental :

$$\bar{g}_{ij} = \bar{\gamma}_{ij} - \frac{\bar{\gamma}_{oi}\,\bar{\gamma}_{oj}}{\bar{\gamma}_{oo}} = \phi^2 g_{ij} \quad , \quad d\bar{s} = \phi\, ds\,,$$

la forme φ étant déterminée par

$$\beta_0\,\varphi = \frac{\bar{\gamma}_{oi}}{\bar{\gamma}_{oo}}\,dx^i = \frac{\gamma_{oi}}{\gamma_{oo}}\,dx^i\,.$$

3. Détermination d'un tenseur $\Theta_{\alpha\beta}$ tel que le principe des géodésiques soit vérifié en métrique conforme de V_4.

Les trajectoires quadridimensionnelles sont extrémales (pour des variations à extrémités fixes) de l'intégrale (IV - 8). Cette intégrale peut s'exprimer en mettant en évidence le ds^* conforme.

$$(IV-8') \qquad \int \sqrt{1+\frac{h^2}{\phi^2\xi^2}}\;\frac{\phi\, ds^*}{\sqrt{\xi}} + h\,\beta_i\,\varphi$$

Considérons par exemple l'hypothèse d'un schéma non chargé $\varphi_i = 0$ les équations d'une masse d'épreuve (neutron) s'écrivent dans V_4 munie de sa métrique conforme :

$$(IV-9)\qquad \delta\left(\int \frac{\Phi}{\sqrt{\xi}}\, ds^*\right) = 0 \quad , \quad (k=0)$$

Pour satisfaire au principe des géodésiques nous devons avoir la relation :

$$(IV-10)\qquad \Phi = \sqrt{\xi}$$

Autrement dit le tenseur $\Theta_{\alpha\beta}$ doit définir dans V_5 un indice pentadimensionnel égal à $\sqrt{\xi}$, les scalaires r et k caractérisant le tenseur $\Theta_{\alpha\beta}$ doivent vérifier la relation :

$$(IV-11)\qquad \varepsilon \frac{dk}{r^2} = d\left(\mathrm{Log}\sqrt{\xi}\right)$$

Rappelons que les géodésiques orientées $d\sigma^2 < 0$ décrivent le mouvement de particules élémentaires telles que proton et électron. Comme nous limiterons les applications à l'étude en théorie unitaire des phénomènes classiques de Mécanique céleste, nous considérons exclusivement les géodésiques orientées $d\sigma^2 > 0$ et choisirons donc $\varepsilon = +1$; de plus la constante h sera considérée comme très petite lorsque nous étudierons un schéma chargé.

Considérons le scalaire r ; son expression a été définie et utilisée dans les calculs du chapitre II :

$$r = \frac{r_0 \int \xi}{1 + \frac{h^2}{\xi^2}} \quad .$$

Rappelons que le choix de l'expression précédente est motivé par deux raisons a priori indépendantes :

- D'une part le souci d'obtenir un coefficient de gravitation constant et égal

au coefficient γ_0 de la relativité, ceci lors de l'interprétation des équations dans la variété conforme construite sur V_4.

- D'autre part ce choix se trouve confirmé lorsqu'on effectue le calcul en seconde approximation du potentiel conforme g^*_{44} : le fait que $\mathcal{L}$ contienne ξ en facteur permet d'effacer le terme étranger Ω en éliminant les termes contenant α_{oo} (cf. chapitre II, paragraphe 4).

Nous choisirons, sous l'hypothèse d'un indice pentadimensionnel $\sqrt{\xi}$, l'expression :

$$r = \frac{\gamma_0 \rho \xi}{1 + \frac{h^2}{\xi^3}} \quad ; \qquad (IV - 12)$$

en effet les relations (IV - 7) montrent qu'il suffit de remplacer v_o par $h/\sqrt{\xi}$ pour obtenir les relations :

$$v_i = \sqrt{1 + \frac{h^2}{\xi^3}}\ u_i .$$

Les composantes rv_iv_j seront alors identiques aux composantes du tenseur d'impulsion-énergie de la relativité :

$$r\, v_i\, v_j = \gamma_0 \rho\, u^*_i\, u^*_j$$

r étant ainsi défini par la relation (IV - 12), le scalaire k doit vérifier la relation différentielle $dk = r\ d(\mathrm{Log}\sqrt{\xi}\ )$ c'est-à-dire :

$$dk = \frac{\gamma_0 \rho}{1 + \frac{h^2}{\xi^3}} \cdot \frac{d\xi}{2} \quad , \qquad (IV - 13)$$

qui se réduit en l'absence de charges à

$$dk = \frac{\gamma_0 \rho}{2}\, d\xi \quad .$$

Nous étudierons plus loin les conditions d'existence d'un tel scalaire k, celles-ci dépendant évidemment de la distribution que l'on désire représenter.

4. Conséquences du choix de l'indice pentadimensionnel.

a) Rappelons pour mémoire que nous avons été conduits à choisir cet indice de façon à ce que la projection sur l'espace quotient de la trajectoire d'une masse d'épreuve non chargée (neutron) soit géodésique de cette variété quotient douée de la métrique conforme de Mme Hennequin.

Il est clair que si nous obtenons par ce procédé des équations de mouvement en accord avec le principe relativiste des géodésiques, l'introduction dans les équations d'Einstein du terme $k\,\gamma_{\alpha\beta}$ aux seconds membres va perturber les expressions des potentiels conformes calculés au chapitre II sous l'hypothèse d'un tenseur pentadimensionnel $\Theta_{\alpha\beta}$ généralisant formellement le tenseur relativiste du schéma matière pure. Nous éviterons cet inconvénient en choisissant k d'ordre $1/c^2$ vis à vis de r. En effet, dans cette hypothèse, le calcul des potentiels ne sera pas altéré en première approximation. En seconde approximation, la contribution du terme $k\,\gamma_{\alpha\beta}$ devra être considérée comme caractéristique de la théorie unitaire : k est en relation directe avec le quinzième potentiel, c'est-à-dire le pouvoir diélectrique.

b) Le choix d'un indice pentadimensionnel $\sqrt{\xi}$ modifie l'application du principe de descente. Considérons la métrique définie par (IV - 4) où l'on a remplacé ϕ par sa valeur $\sqrt{\xi}$. Elle devient

(IV - 14) $$d\bar{\sigma}^2 = \xi\,\gamma_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta = d\bar{\tau}^{*2},$$

donc s'identifie avec la métrique conforme construite sur la variété V_5 à l'aide du scalaire ξ. Le principe de descente doit ainsi sous nos hypothèses être effectué à partir de la variété V_5 douée de la métrique conforme $\xi\,d\sigma^2$.

Nous sommes conduits à distinguer dans V_5 deux métriques :

- la métrique définie par la relation : $d\tau^2 = \gamma_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta$,

les composantes du tenseur fondamental étant déterminées directement par les équations d'Einstein dans V_5. Cette métrique sera qualifiée de "métrique naturelle de la variété V_5".[5]

- la métrique conforme associée à la métrique naturelle définie par la relation :

$$d\overset{*}{\sigma}^2 = \xi\, d\sigma^2 \quad , \quad \left(\overset{*}{\gamma}_{\alpha\beta} = \xi\, \gamma_{\alpha\beta} \right)$$

Observons que la métrique conforme de la variété V_5 fournit directement, en passant à la variété quotient, la métrique de Mme Hennequin. En effet nous pouvons écrire :

$$\overset{*}{g}_{ij} = \xi \left(\gamma_{ij} - \frac{\gamma_{oi}\,\gamma_{oj}}{\gamma_{oo}} \right) = \overset{*}{\gamma}_{ij} - \frac{\overset{*}{\gamma}_{oi}\,\overset{*}{\gamma}_{oj}}{\overset{*}{\gamma}_{oo}} .$$

La trajectoire pentadimensionnelle d'une particule étant ainsi géodésique de la métrique conforme de V_5, le principe de descente d'Y. Thiry s'applique sans modifications nouvelles.

Les géodésiques de la métrique conforme de V_5, satisfaisant à l'intégrale première :

$$\partial_o \overset{*}{\mathcal{L}} = \overset{*}{\gamma}_{o\alpha}\, \overset{*}{v}^{\alpha} = \overset{*}{v}_o = h \quad , \quad \left(\overset{*2}{\mathcal{L}} = \overset{*}{\gamma}_{\alpha\beta}\, \overset{*}{v}^{\alpha} \overset{*}{v}^{\beta} = 1 \right)$$

se projettent sur la variété quotient V_4 suivant les extrémales de l'intégrale :

$$\int \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{\overset{*}{\gamma}_{oo}}\right) \overset{*}{g}_{ij}\, dx^i\, dx^j} + h\, \frac{\overset{*}{\gamma}_{oi}}{\overset{*}{\gamma}_{oo}}\, dx^i ,$$

c'est-à-dire :

$$\int \sqrt{1 + \frac{h^2}{\xi^3}}\; ds^* + \int_1 h\, \varphi .$$

En l'absence de chargesles trajectoires quadridimensionnelles sont géodésiques de la métrique de Mme Hennequin. On obtient donc, dans le cas gravitationnel pur, une correspondance simple entre les géodésiques des variétés riemanniennes V_5 et V_4 munies de leurs métriques conformes respectives, les secondes étant projections des premières et s'en déduisant à l'aide du principe de descente.

Remarquons que, dans le cas où $h \neq o$, c'est le pouvoir diélectrique ξ^3 lui même qui intervient, et de façon simple, dans la métrique de Finsler associéeà la variété quotient.

c) L'équation de continuité (IV - 6) associée au schéma s'écrit :

$$D\alpha \left(\frac{\rho}{\sqrt{\xi}}\, v^{\alpha} \right) = o ,$$

cette équation exprime (cf. chapitre I, paragraphe 3) la conservation le

long des lignes de courant quadridimensionnelles de la quantité :

$$n' = \frac{n}{\sqrt{\xi}} = \frac{r}{\sqrt{\xi}} v^4 \sqrt{\gamma}$$

Il suffit en effet de substituer au scalaire r le scalaire $\frac{r}{\sqrt{\xi}}$, les calculs classiques restant inchangés.

Explicitons n' en termes de métrique conforme dans la variété quotient, il vient :

(IV - 15)
$$n' = \frac{\sqrt{\xi}\, m^*}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{\xi^3}}}$$

la dernière difficulté signalée au chapitre III disparaît : en l' absence de charges la densité énergétique conforme m^* est conservée le long de chaque ligne de courant de V_4. Nous retrouvons ainsi le résultat relativiste.

L'équation de continuité ci-dessus a été considérée en métrique naturelle de V_5, on peut envisager directement son écriture en termes de métrique conforme de V_5.

Explicitons la dérivation covariante :

$$D_\alpha \left(\frac{r}{\sqrt{\xi}} v^\alpha \right) \equiv \partial_\alpha \left(\frac{r}{\sqrt{\xi}} v^\alpha \right) + \Gamma^\chi_{\alpha\beta} \frac{r}{\sqrt{\xi}} v^\beta ,$$

Les symboles de Christoffel relatifs à la métrique conforme de V_5 sont définis par :

$$\overset{*}{\Gamma}{}^\gamma_{\alpha\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \left(\delta^\gamma_\alpha \frac{\partial_\beta \xi}{\xi} + \delta^\gamma_\beta \frac{\partial_\alpha \xi}{\xi} - \gamma_{\alpha\beta} \gamma^{\gamma\lambda} \frac{\partial_\lambda \xi}{\xi} \right).$$

Il vient :

$$\overset{*}{\Gamma}{}^\alpha_{\alpha\beta} = \Gamma^\alpha_{\alpha\beta} + \frac{5}{2} \frac{\partial_\beta \xi}{\xi} .$$

Compte tenu de la relation

$$v^\alpha = \sqrt{\xi}\, \overset{*}{v}{}^\alpha$$

nous pouvons écrire :

$$D_\alpha \left(\frac{r}{\sqrt{\xi}} v^\alpha \right) \equiv \partial_\alpha \left(r \overset{*}{v}{}^\alpha \right) + \left(\overset{*}{\Gamma}{}^\alpha_{\alpha\beta} - \frac{5}{2} \frac{\partial_\beta \xi}{\xi} \right) r \overset{*}{v}{}^\beta$$

D'où l'identité

(IV - 16)
$$D_\alpha \left(\frac{r}{\sqrt{\xi}} v^\alpha \right) \equiv \xi^{5/2} \overset{*}{D}_\alpha \left(r \xi^{-5/2} \overset{*}{v}{}^\alpha \right) .$$

Un raisonnement identique au précédent, mais effectué directement en métrique conforme, permet d'affirmer la conservation de la quantité :

$$\mathfrak{r}\,\xi^{-5/2}\,v^{*4}\sqrt{g^*}$$

soit en explicitant

$$\frac{\alpha_0\,\mathfrak{r}\,\frac{dt}{ds^*}\sqrt{-g^*}}{\sqrt{1+\frac{h^2}{\xi^3}}}\quad ;\quad \left(\sqrt{g^*}=\xi^{3/2}\sqrt{-g^*}\right).$$

Nous retrouvons à titre de vérification la quantité n' ; ce dernier calcul n'est cependant pas sans intérêt :nous allons utiliser la relation (IV - 16) pour déterminer un nouveau tenseur, conservatif en métrique conforme de V_5, équivalent au tenseur $\Theta_{\alpha\beta}$ du point de vue des conditions de conservation.

5. Etude, en métrique conforme de V_5, des conditions de conservation relatives au tenseur $\Theta_{\alpha\beta}$. Equations de mouvement.

Au système des conditions de conservation exprimées en métrique naturelle :

(IV - 17)
$$\begin{cases} v^\alpha D_\alpha v_\beta = \left(\gamma^\alpha_\beta - v^\alpha v_\beta\right)\partial_\alpha\left(\mathrm{Log}\sqrt{\xi}\right) \\ D_\alpha\left(\dfrac{\mathfrak{r}}{\sqrt{\xi}}\,v^\alpha\right)=0 \end{cases}$$

peut être substitué le système :

(IV - 18)
$$\begin{cases} \overset{*}{v}{}^\alpha\,\overset{*}{D}_\alpha\,\overset{*}{v}_\beta = 0 \\ \overset{*}{D}_\alpha\left(\mathfrak{r}\,\xi^{-5/2}\,\overset{*}{v}{}^\alpha\right)=0 \end{cases}$$

constitué des mêmes équations exprimées en termes de métrique conforme de V_5.

On constate immédiatement que ce dernier système résulte des conditions de conservation en métrique conforme du tenseur :

$$\overset{*}{X}_{\alpha\beta} = r\,\xi^{-\frac{5}{2}}\,\overset{*}{v}_{\alpha}\,\overset{*}{v}_{\beta}$$

Vérifions directement cette propriété :

$$D\alpha\left(r\,v^{\alpha}v_{\beta} - k\,\gamma^{\alpha}_{\beta}\right) \equiv \partial_{\alpha}\left(r\,v^{\alpha}v_{\beta}\right) + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\rho}\left(r\,v^{\rho}v_{\beta}\right) \ldots$$

$$- \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}\left(r\,v^{\alpha}v_{\rho}\right) - \partial_{\beta}k\ .$$

Exprimons le second membre en termes de métrique conforme, il vient :

$$D\alpha\left(r\,v^{\alpha}v_{\beta} - k\,\gamma_{\alpha\beta}\right) \equiv \overset{*}{D}_{\alpha}\left(r\,\overset{*}{v}^{\alpha}\overset{*}{v}_{\beta}\right) - \frac{5}{2}\,\frac{\partial_{\alpha}\xi}{\xi}\,r\,\overset{*}{v}^{\alpha}\overset{*}{v}_{\beta}\ ,$$

soit

$$\text{(IV - 19)}\qquad D_{\alpha}\left(r\,v^{\alpha}v_{\beta} - k\,\gamma^{\alpha}_{\beta}\right) \equiv \xi^{5/2}\,\overset{*}{D}_{\alpha}\left(r\,\xi^{-5/2}\overset{*}{v}^{\alpha}\overset{*}{v}_{\beta}\right).$$

Cette identité nous permet , lors de l'interprétation des équations de mouvement, de substituer au tenseur $\Theta_{\alpha\beta}$ (conservatif en métrique naturelle de V_5) un nouveau tenseur $\overset{*}{X}_{\alpha\beta}$ conservatif en métrique conforme. Il est intéressant de noter que ce nouveau tenseur généralise formellement le tenseur relativiste du schéma matière pure. Le terme relatif au pouvoir diélectrique, soit $k\,\gamma_{\alpha\beta}$, a en effet disparu dans le changement de métrique. D'autre part, il paraît évident que seul le tenseur $\overset{*}{X}_{\alpha\beta}$ est susceptible de conduire à une interprétation énergétique classique si l'on observe que la variété quotient douée de la métrique conforme s'identifie à l'espace-temps relativiste. Les conditions

$$\overset{*}{D}_{\alpha}\ \ \overset{*}{X}^{\alpha}_{\beta} = 0$$

pourront s'exprimer de façon simple en termes de cette métrique .

Envisageons les équations de mouvement résultant de ces conditions de conservation. Considérant à part l'intégrale des géodésiques :

$$v_o = h\ ,$$

ainsi que l'équation de continuité :

$$\overset{*}{D}_\alpha \left(\varepsilon \xi^{-\frac{5}{2}} \overset{*}{v}^\alpha \right) = 0$$

Il reste trois équations :

$$\overset{*}{D}_\alpha \quad (\overset{*}{X}{}^\alpha_A) = 0.$$

Ces équations, après une transformation classique, peuvent s'écrire :

$$(IV - 20) \qquad \frac{d}{dt} \left(\overset{*}{X}{}^4_A \sqrt{\gamma^*} \right) = \frac{1}{2} \partial_A \overset{*}{g}_{\alpha\beta} \left(\overset{*}{X}{}^{\alpha\beta} \sqrt{\gamma^*} \right).$$

Signalons un fait essentiel : seules les composantes de la densité tensorielle $\overset{*}{X}{}^{\alpha\beta}\sqrt{\gamma^*}$ interviennent effectivement dans les équations de mouvement proprement dites. Explicitons ces composantes :

$$\overset{*}{X}{}^{\alpha\beta} \sqrt{\gamma^*} = \varepsilon \xi^{-\frac{5}{2}} \overset{*}{v}_\alpha \overset{*}{v}_\beta \sqrt{\gamma^*}.$$

Compte tenu de la relation :

$$\sqrt{\gamma^*} = \xi^{\frac{3}{2}} \sqrt{-g^*},$$

nous pouvons écrire :

$$\varepsilon \xi^{-\frac{5}{2}} \sqrt{\gamma^*} = \frac{\gamma_0 \rho}{1 + \frac{h^2}{\xi^3}} \sqrt{-g^*}.$$

Soit u_i le vecteur, unitaire en métrique conforme de V_4, tangent aux lignes de courant quadridimensionnelles ; nous pouvons exprimer les quinze composantes de la densité tensorielle $\overset{*}{X}{}^{\alpha\beta}\sqrt{\gamma^*}$ en termes de V_4 munie de cette métrique, soit :

$$\overset{*}{X}{}^{00} \sqrt{\gamma^*} = \frac{\gamma_0 \rho h^2}{1 + \frac{h^2}{\xi^3}} \sqrt{-g^*} \; ; \quad \overset{*}{X}{}^{0i} \sqrt{\gamma^*} = \frac{\gamma_0 \rho h}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{\xi^3}}} \overset{*}{u}{}^i \sqrt{-g^*}$$

$$\overset{*}{X}{}^{ij} \sqrt{\gamma^*} = \gamma_0 \rho \overset{*}{u}{}^i \overset{*}{u}{}^j \sqrt{-g^*} = \mathcal{C}^{ij}.$$

$\mathcal{T}_{ij}$ étant exactement la densité tensorielle envisagée en relativité générale.

Envisageons l'hypothèse d'un schéma non chargé,

$$\overset{*}{v}_o = \overset{*}{v}^o = o \quad , \qquad \overset{*}{\gamma}_{oi} = \overset{*}{\gamma}^{oi} = o$$

Il vient :

$$\text{(IV - 21)} \qquad \frac{d}{dt}\left(\mathcal{T}^4{}_A \right) = \frac{1}{2} \partial_A \overset{*}{g}_{ij} \mathcal{T}^{ij} \ .$$

Nous retrouvons, ainsi que le principe de descente le laissait prévoir, les équations relativistes exprimées en termes de métrique conforme de V_4.

Soulignons le fait qu'en définitive seule la densité tensorielle construite sur le tenseur $\overset{*}{X}_{\alpha\beta}$ est justifiable d'une interprétation énergétique dans V_4.

6. Les équations tensorielles en repères orthonormés.

Les premiers membres des équations d'Einstein, évalués en repères orthonormés de la variété V_4 munie de la métrique conforme, ont été signalés au chapitre I - (1 - 10). Seuls les seconds membres sont légèrement modifiés par nos hypothèses.

Il suffit de tenir compte des relations :

$$v_{\underline{i}} = \sqrt{1 + \frac{h^2}{\xi^3}} \ u_{\underline{i}} = \sqrt{1 + \frac{h^2}{\xi^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\xi}} \overset{*}{u}_{\underline{i}} \ ; \ v_{\underline{o}} = \frac{v_o}{\xi} = \frac{h}{\xi^{3/2}} \ ;$$

pour écrire immédiatement le système sous la forme :

(IV - 22)

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{S}^{*}_{\underline{i}\underline{j}} + \frac{3}{4} \overset{*}{g}_{\underline{i}\underline{j}} \overset{*}{g}^{\underline{p}\underline{q}} \frac{\partial_{\underline{p}} \xi}{\xi} \frac{\partial_{\underline{q}} \xi}{\xi} - \frac{3}{2} \frac{\partial_{\underline{i}} \xi}{\xi} \frac{\partial_{\underline{j}} \xi}{\xi} - \gamma_o \overset{*}{\mathcal{T}}_{\underline{i}\underline{j}} = \gamma_o \rho \overset{*}{u}_{\underline{i}} \overset{*}{u}_{\underline{j}} - \frac{k}{\xi} \overset{*}{g}_{\underline{i}\underline{j}} \\ \overset{*}{\nabla}_{\underline{j}} \overset{*}{H}^{\underline{j}}{}_{\underline{i}} = \dfrac{4\pi \rho \beta_o h}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{\xi^3}}} \overset{*}{u}_{\underline{i}} \\ \dfrac{\Delta \xi}{\xi} + \gamma_o \xi^2 \Pi^2 = \gamma_o \left(\xi \dfrac{h^2 + \frac{\xi^3}{3}}{h^2 + \xi^3} - \frac{2}{3} k \right) . \end{array} \right.$$

Les équations de Maxwell permettent de préciser la densité énergétique relative aux charges électromagnétiques, soit

$$e^{*} = \mu \frac{dt}{ds^{*}} \sqrt{-g^{*}} \quad , \quad \mu = \rho \frac{\beta_0 h}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{\xi^3}}}$$

Nous avons déjà établi la conservation le long des lignes de courant de V_4 de la quantité

$$n' = \frac{\gamma_0 m^{*}}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{\xi^3}}} \quad ,$$

$m^{*} = \rho \frac{dt}{ds^{*}} \sqrt{-g^{*}}$ représentant la densité énergétique conforme relative à la gravitation pure. Observons que pour une particule chargée ($h \neq o$) m^{*} n'est pas conservée le long des lignes de courant de V_4 puisque le pouvoir diélectrique ξ^3 est variable. Par contre la densité énergétique conforme e^{*} possède cette propriété de conservation. Nous avons en effet :

$$e^{*} = \frac{\gamma_0 h}{\gamma_0} \quad n'.$$

Il est intéressant de noter que cette propriété, obtenue par Mme Hennequin sous l'hypothèse d'un tenseur $\Theta_{\alpha\beta}$ réduit à son premier terme $\rho v_\alpha v_\beta$, n'est pas altérée par l'hypothèse d'un indice pentadimensionnel égal à $\sqrt{\xi}$.

Ceci résulte du fait suivant : la propriété de conservation de la densité conforme e^{*} peut être établie directement en prenant la dérivée covariante contractée des deux membres des équations de Maxwell ; cette dérivée étant considérée en métrique conforme de V_4, il vient :

$$\overset{*}{\nabla}_i \left(\mu \, u^{*i} \right) = o.$$

Evaluons le rapport des densités énergétiques conformes e^* et m^*, il vient :

(IV - 23)

$$\frac{e^*}{m^*} = \frac{\mu}{\rho} = \frac{\beta_0 h}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{\xi^3}}}$$

Cette relation diffère de la relation analogue établie en théorie provisoire par la présence du pouvoir diélectrique variable, terme caractéristique de la théorie unitaire pentadimensionnelle.

(B)

Schéma fluide parfait généralisé.

1. Généralisation du schéma fluide parfait non chargé.

Cette généralisation pourra être effectuée simplement en considérant la remarque finale du paragraphe 5. En effet la densité tensorielle construite en métrique conforme de V_5 à partir du tenseur $X^*_{\alpha\beta}$ joue un rôle déterminant dans les équations de mouvement associées au schéma ; les composantes d'indices i, j de cette densité doivent être identifiées, en l'absence de charges, aux composantes de mêmes indices de la densité tensorielle relativiste $\mathcal{C}_{ij}$.

Nous sommes ainsi amenés à poser en l'absence de charges :

$$(IV-24)\qquad X^*_{\alpha\beta}\sqrt{\gamma^*} = \gamma_0\left[\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right)v^*_\alpha v^*_\beta - \frac{p}{c^2}\gamma^*_{\alpha\beta}\right]\sqrt{-g^*}.$$

Observons que les composantes $X^*_{oi}\sqrt{\gamma^*}$ sont nulles. En effet le schéma n'étant pas chargé nous aurons, en l'absence de champ électromagnétique :

$$v^*_o = o \quad , \qquad \gamma^*_{oi} = o.$$

Par contre la quinzième composante ne s'annule pas, il vient :

$$X^*_{oo}\sqrt{\gamma^*} = -\frac{\gamma_0}{c^2}\,p\sqrt{-g^*}\,\gamma^*_{oo}$$

Les composantes $X^*_{ij}\sqrt{\gamma^*}$ étant rigoureusement identiques aux composantes $\mathcal{C}_{ij}$ évaluées en métrique conforme, la contribution de la quinzième composante aura pour effet de modifier légèrement les équations. Nous interpréterons ce fait en élaborant les équations du mouvement résultant des propriétés de conservation du tenseur $X^*_{\alpha\beta}$. Ce tenseur a pour expression

$$(IV-25)\qquad X^*_{\alpha\beta} = \gamma_0\left[\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right)v^*_\alpha v^*_\beta - \frac{p}{c^2}\gamma^*_{\alpha\beta}\right]\xi^{-3/2}$$

Le nouveau scalaire p doit être considéré comme décrivant la pression au sens classique.

Les conditions de conservation écrites en métrique conforme de V_5 :

$$\overset{*}{D}_{\alpha} \overset{*}{X}^{\alpha}_{A} = 0 ,$$

donnent naissance aux équations de mouvement suivantes :

$$(IV - 26) \qquad \partial_i \left(\overset{*}{X}^{i}_{A} \sqrt{\gamma^*} \right) = \frac{1}{2} \partial_A \overset{*}{\gamma}_{\alpha\beta} \cdot \left(\overset{*}{X}^{\alpha\beta} \sqrt{\gamma^*} \right).$$

Le premier membre de ces équations peut s'exprimer de façon simple ; il vient en effet :

$$\overset{*}{X}^{4}_{A} \sqrt{\gamma^*} = \gamma_0 \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \overset{*}{v}^{4} \overset{*}{v}_{A} \sqrt{-g^*} ,$$

$$\overset{*}{X}^{B}_{A} \sqrt{\gamma^*} = \gamma_0 \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \overset{*}{v}^{B} \overset{*}{v}_{A} \sqrt{-g^*} - \frac{\gamma_0}{c^2} p \, \delta^{B}_{A} \sqrt{-g^*} ,$$

soit : $$\overset{*}{X}^{B}_{A} \sqrt{\gamma^*} = \left(\overset{*}{X}^{4}_{A} \sqrt{\gamma^*} \right) V^{B} - \delta^{B}_{A} \frac{\gamma_0}{c^2} p \sqrt{-g^*}$$

Nous pouvons écrire :

$$\partial_i \left(\overset{*}{X}^{i}_{A} \sqrt{\gamma^*} \right) = \frac{d}{dt} \left(\overset{*}{X}^{4}_{A} \sqrt{\gamma^*} \right) - \frac{\gamma_0}{c^2} \partial_A \left(p \sqrt{-g^*} \right).$$

Examinons les seconds membres des équations, nous retrouvons d'une part les seconds membres relativistes exprimés en termes de métrique conforme de V_4; d'autre part un terme nouveau provenant de la quinzième composante $\overset{*}{X}^{oo} \sqrt{\gamma^*}$, soit :

$$\frac{1}{2} \partial_A \overset{*}{\gamma}_{oo} \cdot \left(- \frac{\gamma_0}{c^2} p \, \overset{*}{\gamma}^{oo} \sqrt{-g^*} \right)$$

Ce terme s'évalue aisément en observant que le quinzième potentiel conforme est égal au pouvoir diélectrique changé de signe - ξ^3; supposant $\overset{*}{\gamma}_{oi} = 0$ (absence de matière chargée) nous avons la relation :

$$\overset{*}{\gamma}^{oo} \; \overset{*}{\gamma}_{oo} = 1 \qquad \text{d'où} \qquad \overset{*}{\gamma}^{oo} = - \xi^{-3}$$

le terme s'écrit : $$- \frac{\gamma_0}{c^2} p \sqrt{-g^*} \frac{\partial_A \xi^{3/2}}{\xi^{3/2}} .$$

Observons que ce terme issu du second membre et dépendant essentiellement du pouvoir diélectrique (donc caractéristique de la théorie unitaire) se trouve être harmonieusement fusionné avec le terme classique isolé au premier membre. Finalement nous pouvons écrire les équations de mouvement relatives au schéma fluide parfait non chargé sous la forme :

(IV - 27)
$$\frac{d}{dt}\left\{\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right)\overset{*}{u}^{4}\overset{*}{u}_{A}\sqrt{-g^{*}}\right\} =$$
$$\frac{1}{2}\partial_A \overset{*}{g}_{ij}\cdot\left\{\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right)\overset{*}{u}^{i}\overset{*}{u}^{j}-\frac{p}{c^2}\overset{*}{g}^{ij}\right\}\sqrt{-g^{*}}+\frac{1}{c^2}\xi^{\frac{3}{2}}\partial_A\left(p\,\xi^{-3/2}\sqrt{-g^{*}}\right)$$

où la seule différence avec les équations relativistes réside dans l'intervention au dernier terme de la racine carrée du pouvoir diélectrique.

Considérant le développement de $\xi^{3/2}$
$$\xi^{3/2} = 1+\frac{U}{c^2}+O\left(\frac{1}{c^4}\right)$$

nous constatons que cette contribution directe du pouvoir diélectrique aux équations de mouvement relève d'une troisième approximation et de ce fait peut être considérée comme sans influence dans des calculs effectifs.

2. Extension au cas du schéma fluide parfait chargé.

Envisageons maintenant le cas d'un schéma chargé. Le tenseur $\overset{*}{X}_{\alpha\beta}$ définit un indice $\overset{*}{F}$ dans la variété V_5 munie de sa métrique conforme. Nous devons avoir nécessairement :

(IV - 28)
$$\overset{*}{X}_{\alpha\beta} = \frac{\chi_0}{1+\frac{h^2}{F^{*2}\xi^3}}\left[\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right)\overset{*}{v}_{\alpha}\overset{*}{v}_{\beta}-\frac{p}{c^2}\overset{*}{\gamma}_{\alpha\beta}\right]\xi^{-3/2}$$

(IV - 29)
$$d\left(\operatorname{Log}\overset{*}{F}\right) = \frac{\xi^{3/2}+\frac{h^2}{F^{*2}\xi^{3/2}}}{\rho c^2+p}\,d\left[\frac{p}{\xi^{3/2}+\frac{h^2}{F^{*2}\xi^{3/2}}}\right]$$

de façon à retrouver les expressions relatives à un schéma non chargé en annulant la constante h.

Considérons l'indice $\overset{*}{F}$ défini en métrique conforme de V_5 ; nous pouvons écrire le développement suivant :

$$d\left(\operatorname{Log}\overset{*}{F}\right) = \frac{dp}{\rho c^2}+O\left(\frac{1}{c^4}\right) .$$

soit $F^* = 1 + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho c^2} + o\left(\frac{1}{c^4}\right)$;

le pouvoir diélectrique n'a d'influence qu'en seconde approximation dans le calcul de F^* qui joue ainsi le rôle de l'indice relativiste d'un schéma fluide parfait.

Notons à ce sujet la remarque suivante : le schéma considéré étant holonome dans la variété V_5, les lignes de courant pentadimensionnelles sont géodésiques de la variété munie de la métrique.

$$d\overset{*}{\sigma} = \overset{*}{F}\, d\overset{*}{\sigma} \quad ;$$

ces lignes, satisfaisant à l'intégrale première des géodésiques, se projettent sur la variété V_4 suivant les extrémales de l'intégrale :

$$\int \sqrt{1 + \frac{h^2}{F^{*2}\xi^3}}\; F^*\, ds^* + \beta_0 h \varphi \cdot$$

A ces équations de mouvement quadridimensionnelles correspond un indice dans la variété quotient ; cet indice a pour expression :

$$\phi^* = \sqrt{1 + \frac{h^2}{F^{*2}\xi^3}}\; F^* \cdot$$

Autrement dit si nous interprétons les équations de conservation relatives au tenseur $\overset{*}{X}_{\alpha\beta}$ dans la variété V_4 douée de sa métrique conforme, nous mettons en évidence un tenseur défini sur V_4, conservatif en métrique conforme de cette variété et définissant un schéma holonome quadridimensionnel d'indice ϕ^*. Notons l'égalité de F^* et ϕ^* en l'absence de charges.

3. Retour à la métrique naturelle.

Le problème qui se pose maintenant est le suivant : déterminer en métrique naturelle de V_5 un tenseur $\Theta_{\alpha\beta}$, conservatif dans cette métrique, équivalent au tenseur $\overset{*}{X}_{\alpha\beta}$ au point de vue des conditions de conservation.

En métrique conforme de V_5 les équations des lignes de courant s'écrivent :

$$\overset{*}{v}^{\alpha}\, D_{\alpha}\, \overset{*}{v}_{\beta} = \left(\overset{*}{\gamma}^{\alpha}_{\beta} - \overset{*}{v}^{\alpha}\overset{*}{v}_{\beta}\right) \partial_{\alpha}\left(\operatorname{Log} F^*\right).$$

Exprimons ces équations en métrique naturelle de la variété V_5

$$v^\alpha D_\alpha v_\beta = \left(\gamma^\alpha{}_\beta - v^\alpha v_\beta \right) \partial_\alpha \left(\log F^* \sqrt{\xi} \right).$$

Il en résulte que le tenseur $\Theta_{\alpha\beta}$ doit définir sur V_5 munie de la métrique naturelle un indice F tel que :

$$F = \overset{*}{F} \sqrt{\xi}$$

D'autre part, l'équation de continuité relative au tenseur $\overset{*}{X}_{\alpha\beta}$ s'écrit en métrique conforme :

$$\overset{*}{D}_\alpha \left[\frac{\gamma_0}{1 + \frac{\hbar^2}{F^{*2} \xi^3}} \cdot \frac{\xi^{-3/2}}{F^*} \left(\rho + \frac{h}{c^2} \right) \overset{*}{v}{}^\alpha \right] = 0$$

Exprimons cette équation en métrique naturelle de V_5, nous utiliserons pour cela la relation (IV - 16), il vient :

$$\xi^{-5/2} \cdot D_\alpha \left[\frac{\gamma_0}{1 + \frac{\hbar^2}{F^{*2} \xi^3}} \cdot \frac{\sqrt{\xi}}{F^*} \left(\rho + \frac{h}{c^2} \right) v^\alpha \right] = 0$$

soit :

$$D_\alpha \left[\frac{\gamma_0 \left(\rho + \frac{h}{c^2} \right) \xi}{1 + \frac{\hbar^2}{F^{*2} \xi^3}} \cdot \frac{1}{F} v^\alpha \right] = 0 \qquad \left(F = \overset{*}{F} \sqrt{\xi} \right)$$

Nous en déduisons que le tenseur $\Theta_{\alpha\beta} = r' v_\alpha v_\beta - k' \gamma_{\alpha\beta}$ est tel que :

$$r' = \frac{\gamma_0 \left(\rho + \frac{h}{c^2} \right) \xi}{1 + \frac{\hbar^2}{F^{*2} \xi^3}} .$$

Pour déterminer complètement le tenseur il faut trouver l'expression du second scalaire k' ; ce scalaire sera défini par la relation différentielle exprimant que l'indice est égal à $\overset{*}{F} \sqrt{\xi}$ en métrique naturelle

$$\frac{dk'}{r'} = d \left(\log F^* \sqrt{\xi} \right)$$

c'est-à-dire :

$$dk' = \frac{\gamma_0 \rho}{1 + \frac{h^2}{F'^{*2}\xi^3}} \frac{d\xi}{2} + \frac{\gamma_0}{c^2}\left[\xi\, dp' + p' \xi^{5/2} d(\xi^{-3/2}) + \frac{p'}{2} d\xi\right],$$

ayant posé pour simplifier les calculs :

$$p' = \frac{p}{1 + \frac{h^2}{F'^{*2}\xi^3}}$$

Finalement nous obtenons après réduction :

$$(IV - 30) \quad dk' = \frac{\gamma_0 \rho}{1 + \frac{h^2}{F'^{*2}\xi^3}} \frac{d\xi}{2} + \frac{\gamma_0}{c^2} \xi^2 d\left(\frac{p'}{\xi}\right).$$

Remarquons la forme simple sous laquelle se présente cette différentielle. Si nous effaçons le terme de pression nous retrouvons la relation caractérisant le schéma matière pure généralisé à la théorie unitaire :

$$dk' = dk = \frac{\gamma_0 \rho}{1 + \frac{h^2}{\xi^3}} \cdot \frac{d\xi}{2}$$

On peut, à titre de vérification, établir la relation :

$$(IV - 31) \qquad D_\alpha \left(\varepsilon' v^\alpha v_\beta - k' \gamma^\alpha{}_\beta\right) \equiv$$

$$\xi^{5/2} \cdot \overset{*}{\Pi}_\alpha \left\{ \frac{\gamma_0 \xi^{-3/2}}{1 + \frac{h^2}{F'^{*2}\xi^3}} \left[\left(\gamma + \frac{p}{c^2}\right) v^{*\alpha} v^*_\beta - \frac{p}{c^2} \overset{*}{\gamma}{}^\alpha{}_\beta \right] \right\},$$

relation qui généralise (IV - 19) au cas d'un schéma fluide parfait pentadimensionnel; cette identité met en évidence la substitution des tenseurs $\Theta_{\alpha\beta}$ et $\overset{*}{X}_{\alpha\beta}$ lors du changement de métrique dans V_5. Le tenseur $\Theta_{\alpha\beta}$ est relié au tenseur géométrique $S_{\alpha\beta}$ par les équations d'Einstein et permet ainsi la détermination des quinze potentiels $\gamma_{\alpha\beta}$;

par contre le tenseur $\overset{*}{X}_{\alpha\beta}$, conservatif en métrique conforme de V_5, devra être envisagé lors de l'interprétation dans cette métrique des équations du mouvement.

4. Etude des densités énergétiques de charge et de masse.

Le tenseur $\Theta_{\alpha\beta}$ ainsi déterminé permettra, grâce au changemant de métrique, de retrouver dans la variété V_4 munie de la métrique conforme les propriétés classiques du schéma fluide parfait relativiste. En effet les modifications dues à la présence du pouvoir diélectrique seront toujours extrêmement faibles. Pour étudier d'abord les densités énergétiques, considérons l'équation de continuité ; quelle que soit dans V_5 la métrique utilisée, cette équation exprime la conservation le long des lignes de courant de V_4 de la quantité :

$$n' = \frac{\gamma_0}{1 + \frac{h^2}{F^{*2}\xi^3}} \frac{\left(\rho + \frac{h}{c^2}\right)\sqrt{\xi}\, v^4 \sqrt{\gamma}}{F^*} = \frac{\gamma_0}{1 + \frac{h^2}{F^{*2}\xi^3}} \frac{\left(\rho + \frac{h}{c^2}\right)\xi^{-\frac{3}{2}} v^{*4} \sqrt{\gamma^*}}{F^*}$$

soit en termes de V_4 munie de la métrique conforme :

$$n' = \frac{\gamma_0}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{F^{*2}\xi^3}}} \cdot \frac{\left(\rho + \frac{h}{c^2}\right)\frac{dt}{ds^*}\sqrt{-g^*}}{F^*}$$

Nous avons noté que F^* s'identifiait à l'indice relativiste ; plus précisément nous pouvons écrire :

$$F = 1 + \frac{h}{\rho c^2} + o\left(\frac{1}{c^4}\right),$$

les variations de ρ étant tenues pour faibles.

Nous pouvons dans ce cas en déduire le développement de n' :

$$(IV - 32)\quad n' = \frac{\gamma_0}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{F^{*2}\xi^3}}}\, m^* \left[1 + o\left(\frac{1}{c^4}\right)\right]$$

$\overset{*}{m} = \rho \frac{dt}{ds^*} \sqrt{-g^*}$ étant la densité énergétique envisagée dans l'étude du schéma matière pure.

Nous constatons que, conformément à l'étude classique effectuée en relativité, les termes d'ordre $1/c^2$ (relatifs à la pression p) se détruisent dans le développement; nous obtenons :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m^*}{\sqrt{1+\frac{h^2}{F^{*2}\xi^3}}}\right] = 0\left(\frac{1}{c^4}\right) \qquad (IV-33)$$

Cette relation généralise à la théorie unitaire la relation classique, obtenue d'ailleurs en faisant h = o (particule non chargée), soit :

$$\frac{d}{dt}\left(m^*\right) = 0\,(1/c^4),$$

ce qui exprime la propriété suivante : dans le cadre d'un schéma fluide parfait généralisé l'énergie provenant des pressions est négligeable (même en seconde approximation) vis à vis de l'énergie provenant des masses.

La densité énergétique m^* apparaît ainsi comme étant la densité "la plus conservatrice" associée au schéma non chargé. Dans le cas d'un schéma unitaire, on doit alors lui substituer la quantité :

$$\frac{m^*}{\sqrt{1+\frac{h^2}{F^{*2}\xi^3}}}$$

Considérons d'autre part les équations de Maxwell relatives à un schéma fluide parfait chargé dans le cadre de la théorie unitaire :

$$\frac{\beta}{2\xi}\,\overset{*}{\nabla}_{\underline{j}}\,\overset{*}{H}^{\underline{j}}_{\underline{i}} = \mathcal{L}^{1}\,v_{\underline{o}}\,v_{\underline{i}}$$

Les repères étant orthonormés et constituant un système adapté nous avons les relations :

$$v_{\underline{o}} = \frac{h}{F^*\,\xi^{3/2}} \quad , \quad v_{\underline{i}} = \sqrt{1+\frac{h^2}{F^{*2}\,\xi^3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\xi}}\,\overset{*}{u}_{\underline{i}}$$

Il vient alors en métrique conforme de V_4 :

$$\overset{*}{\nabla}_{\underline{j}}\,\overset{*}{H}^{\underline{j}}_{\underline{i}} = 4\pi\mu\,\overset{*}{u}_{\underline{i}}$$

avec

$$\mu = \frac{\beta_o\,h\left(\rho+\frac{h}{c^2}\right)}{F^*\sqrt{1+\frac{h^2}{F^{*2}\xi^3}}} \qquad (IV-34)$$

Considérons l'expression de la quantité n' obtenue précédemment ; e^* étant la densité énergétique conforme associée à la densité de charge μ, nous constatons aisément la proportionnalité de e^* et n' .

$$e^* = \frac{\beta_0 h}{\gamma_0} n'$$

La densité énergétique e^* est donc exactement conservative dans le cadre d'un schéma fluide parfait chargé (ceci constitue une extension de la propriété établie dans l'étude du schéma matière pure généralisé).

Nous pouvons en déduire la relation approchée :

$$\frac{e^*}{m^*} = \frac{\mu}{\rho} = \frac{\beta_0 h}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{\Gamma^{*2} \xi^3}}} \left[1 + O\left(\frac{1}{c^4}\right)\right]$$

5. Les équations de conservation en métrique conforme de V_4.

Nous allons maintenant écrire explicitement les équations de conservation obtenues dans la variété V_4 munie de la métrique de Mme Hennequin ; c'est-à-dire (écartant l'intégrale première des géodésiques) les équations directement comparables à celles de la relativité.

Nous les obtiendrons en interprétant dans V_4 les équations de conservation relatives au tenseur $\overset{*}{X}_{\alpha\beta}$, la variété V_5 étant repérée dans un système de coordonnées orthonormé et adapté. (nota)

Les conditions de conservation du tenseur $\overset{*}{X}_{\alpha\beta}$ sont données par le système :

$$\overset{*}{v}^{\alpha} \overset{*}{D}_{\alpha} \overset{*}{v}_{\beta} = \left(\overset{*}{\delta}^{\alpha}_{\beta} - \overset{*}{v}^{\alpha} \overset{*}{v}_{\beta} \right) \partial_{\alpha} \left(\operatorname{Log} \Gamma^* \right)$$

$$\overset{*}{D}_{\alpha} \left[\frac{\gamma_0}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{\Gamma^{*2} \xi^3}}} \frac{\xi^{-3/2}}{\Gamma^*} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \overset{*}{v}^{\alpha} \right] = 0$$

.....

(nota) Dans un tel système de coordonnées les coefficients de rotation seront notés $\overset{*}{\gamma}_{\alpha\beta\gamma}$.

L'équation de continuité peut être écrite immédiatement en termes de $V_{\underline{i}}$ en utilisant un lemme classique sur les divergences [9 (page 204)].

Il vient, en appliquant la relation indiquée par le lemme en métriques conformes de V_5 et V_4, (ξ doit être changé en $\xi^{3/2}$) :

$$\overset{*}{\nabla}_{\underline{i}} \left[\frac{\gamma_0}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{F^{*2}\xi^3}}} \; \frac{\rho + \frac{p}{c^2}}{F^*} \; \overset{*}{u}^{\underline{i}} \right] = 0 \; ,$$

c'est-à-dire l'équation de continuité relativiste, l'indice quadridimensionnel étant défini par

$$\Phi^* = F^* \sqrt{1 + \frac{h^2}{F^{*2}\xi^3}}$$

Considérons l'équation représentant l'intégrale première des géodésiques, soit :

$$\overset{*}{v}^{\underline{\alpha}} \; \overset{*}{D}_{\underline{\alpha}} \overset{*}{v}_{\underline{\rho}} = \left(\gamma^{\underline{\alpha}}_{\underline{\rho}} - \overset{*}{v}^{\underline{\alpha}} \overset{*}{v}_{\underline{\rho}} \right) \partial_{\underline{\alpha}} \left(\mathrm{Log}\, F^* \right)$$

Explicitons la dérivée covariante :

$$\overset{*}{\gamma}_{\underline{i}\,\underline{\rho}\,\underline{\rho}} \; \overset{*}{v}^{\underline{\rho}} \overset{*}{v}^{\underline{i}} + \overset{*}{v}^{\underline{i}} \partial_{\underline{i}} \overset{*}{v}_{\underline{\rho}} - \overset{*}{\gamma}_{\underline{\rho}\,\underline{j}\,\underline{i}} \; \overset{*}{v}^{\underline{i}} \overset{*}{v}^{\underline{j}} = - \overset{*}{v}^{\underline{i}} \overset{*}{v}_{\underline{\rho}} \partial_{\underline{i}} \left(\mathrm{Log}\, F^* \right)$$

$\overset{*}{\gamma}_{\underline{\rho}\,\underline{j}\,\underline{i}} \; \overset{*}{v}^{\underline{i}} \overset{*}{v}^{\underline{j}}$ est nul (antisymétrie des coefficients $\overset{*}{\gamma}_{\underline{\rho}\,\underline{j}\,\underline{i}}$).

Il reste : $$\frac{\partial_{\underline{i}} \overset{*}{\xi}}{\overset{*}{\xi}} \; \overset{*}{v}^{\underline{\rho}} \overset{*}{v}^{\underline{i}} + \overset{*}{v}^{\underline{i}} \partial_{\underline{i}} \overset{*}{v}_{\underline{\rho}} = - \overset{*}{v}^{\underline{i}} \overset{*}{v}_{\underline{\rho}} \partial_{\underline{i}} \left(\mathrm{Log}\, F^* \right)$$

Cette relation, établie en métrique définie positive, doit être modifiée en tenant compte des règles classiques (multiplication par i pour tout indice contravariant sauf 4 , par - i pour tout indice covariant sauf 4, ξ^* est multiplié par i.). En signature hyperbolique, il vient :

$$\frac{\partial_i \xi^*}{\xi^*} v^{*\varrho} v^{*i} - v^{*i} \partial_i v^*_{\varrho} - v^{*i} v^*_{\varrho} \partial_i (\mathrm{Log}\, F^*) = 0 ,$$

soit :

$$v^{*i} \partial_i \left(\mathrm{Log}\, v^*_{\varrho} + \mathrm{Log}\, F^* + \mathrm{Log}\, \xi^* \right) = 0 \quad , \quad (\xi^* = \xi^{3/2}),$$

ce qui exprime la conservation le long des lignes de courant de la quantité

$$v^*_{\varrho} \; F^* \; \xi^{3/2}$$

Nous obtenons ainsi la relation

$$v^*_{\varrho} = \frac{h}{F^* \xi^{3/2}}$$

cette relation peut être établie directement lors du changement de métrique.

Il reste maintenant à interpréter les équations :

$$v^{*\alpha} D^*_{\alpha} v^*_i = \left(\gamma^{*\alpha}_{i} - v^{*\alpha} v^*_i \right) \partial_\alpha \left(\mathrm{Log}\, F^* \right)$$

(i = 1, 2, 3, 4)

Explicitons les dérivations covariantes :

$$v^{*\varrho} \left(- \gamma^*_{i\, \varrho\, \varrho} \, v^{*\varrho} \right) + v^{*j} \left(\partial_j v^*_i - \gamma^*_{i\, \varrho\, j} \, v^{*\varrho} \right) = \left(\gamma^{*\alpha}_{i} - v^{*\alpha} v^*_i \right) \partial_\alpha \left(\mathrm{Log}\, F^* \right)$$

avec

$$\gamma^*_{i\, \varrho\, \varrho} = \frac{\partial_i \xi^{3/2}}{\xi^{3/2}} \quad , \quad \gamma^*_{i\, j\, \varrho} = \gamma^*_{i\, \varrho\, j} = \frac{1}{2} \beta_0 \, \xi^{3/2} \, F_{ij}$$

Transformons ces relations grâce aux règles indiquées, nous pouvons écrire en métrique hyperbolique :

$$v^{*j} \nabla^*_j v^*_i + \frac{\partial_i \xi^{3/2}}{\xi^{3/2}} \cdot \frac{h^2}{F^{*2} \xi^3} - \frac{\beta_0 h}{F^*} F_{ij} v^{*j} = \left(\gamma^{*j}_{ij} - v^{*j} v^*_i \right) \partial_j \left(\mathrm{Log}\, F^* \right)$$

soit, en introduisant le vecteur u tangent aux lignes de courant de V_4 :

$$u^{*j} \sqrt{1 + \frac{h^2}{F^{*2} \xi^3}} \; \nabla^*_j \left(u^*_i \sqrt{1 + \frac{h^2}{F^{*2} \xi^3}} \right) + \frac{3}{2} \frac{h^2}{F^{*2}} \frac{\partial_i \xi}{\xi^4}$$

$$- \frac{\beta_0 h}{F^*} \sqrt{1 + \frac{h^2}{F^{*2} \xi^3}} \; F_{ij} \, u^{*j} = \left[g^*_{ij} - \left(1 + \frac{h^2}{F^{*2} \xi^3} \right) u^{*j} u^*_i \right] \partial_j \left(\mathrm{Log}\, F^* \right)$$

Finalement :

$$\overset{*}{u}^{\underline{j}}\,\overset{*}{\nabla}_{\underline{j}}\,\overset{*}{u}_{\underline{i}} = \left(\overset{*}{g}{}^{\underline{j}}_{\underline{i}} - \overset{*}{u}^{\underline{j}}\,\overset{*}{u}_{\underline{i}}\right)\partial_{\underline{j}}\,\mathrm{Log}\left(F^{*}\sqrt{1+\frac{h^2}{F^{*2}\xi^3}}\right) + \frac{\beta_0 h}{F^{*}\sqrt{1+\frac{h^2}{F^{*2}\xi^3}}}\,F_{\underline{i}\underline{j}}\,\overset{*}{u}^{\underline{j}}$$

Nous retrouvons des équations très proches des équations classiques en relativité ; seul en effet l'indice quadridimensionnel est légèrement modifié.

Les équations, en vertu de la relation (IV - 3½), peuvent s'écrire sous la forme :

$$\overset{*}{u}^{\underline{j}}\,\overset{*}{\nabla}_{\underline{j}}\,\overset{*}{u}_{\underline{i}} = \left(\overset{*}{g}{}^{\underline{j}}_{\underline{i}} - \overset{*}{u}^{\underline{j}}\,\overset{*}{u}_{\underline{i}}\right)\left[\partial_{\underline{j}}\,\mathrm{Log}\left(F^{*}\sqrt{1+\frac{h^2}{F^{*2}\xi^3}}\right) + \frac{\mu}{\rho+\frac{h}{c^2}}\,F_{\underline{j}\underline{k}}\,\overset{*}{u}^{\underline{k}}\right]$$

Il est remarquable de noter que ces équations sont (si l'on efface le terme négligeable contenant le pouvoir diélectrique) rigoureusement identiques aux équations du fluide chargé obtenues par Lichnérowicz [9].

(C)

Le problème de Cauchy dans le cadre d'un schéma intérieur en théorie pentadimensionnelle. Les fronts d'onde, vitesse de propagation des ondes.

1. Généralités

Nous reprenons rapidement cette étude classique dans l'hypothèse d'un tenseur pentadimensionnel

$$\Theta_{\alpha\beta} = r' v_\alpha v_\beta - k' \gamma_{\alpha\beta}$$

Le système des équations de champ peut être mis sous la forme :

$$\begin{cases} R_{\alpha\beta} = r' v_\alpha v_\beta - \dfrac{r' - k'}{3} \gamma_{\alpha\beta} & (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3) \\ S^4_\lambda = r' v^4 v_\lambda - k' \gamma^4_\lambda & (\lambda = 0, 1, 2, 3, 4) \end{cases}$$

avec la condition $r > 0$.

Rappelons que les coordonnées utilisées sont telles que l'hypersurface portant les données initiales du problème de Cauchy soit définie localement par $x^4 = 0$ (l'indice 4 n'est plus supposé correspondre à la variable temporelle). Le problème de Cauchy peut alors s'énoncer :

Etant donnés, sur une hypersurface de V_5 engendrée par des trajectoires, les potentiels $\gamma_{\alpha\beta}$ et leurs dérivées permières $\partial_4 \gamma_{\alpha\beta}$, déterminer au voisinage de l'hypersurface les valeurs de ces potentiels ainsi que celles de r', k' et v_λ supposées satisfaire aux équations de Jordan-Thiry.

Ce problème peut être résolu simplement, nous ne reprendrons pas le détail du raisonnement [9] mais nous considèrerons plus particulièrement les équations de conservation qui déterminent les dérivées d'indice 4 des quantités v^4, r' et k' à la traversée de l'hypersurface.

Les conditions de conservation,

$$r' v^\alpha D_\alpha v^\beta = \left(\gamma^{\alpha\beta} - v^\alpha v^\beta \right) \partial_\alpha k' \quad , \quad D_\alpha (r' v^\alpha) = v^\alpha \partial_\alpha k' \quad ,$$

peuvent s'écrire :

(IV - 35)
$$\begin{cases} r' v^4 \partial_4 v^4 - (\gamma^{44} - v^{4^2}) \partial_4 k' = A^4 \\ r' \partial_4 v^4 + v^4 (\partial_4 r' - \partial_4 k') = B \end{cases}$$

où A^4 et B représentent des fonctions des seules données de Cauchy sur l'hypersurface.

2. Schéma fluide parfait non chargé (cas classique).

Nous allons d'abord retrouver les résultats classiques concernant le schéma fluide parfait non chargé. Pour cela il nous faudra adopter l'attitude suivante : nous supposerons que les relations définissant r' et k' en fonction des scalaires ξ , φ , p sont vérifiées a priori dans toute la variété V_5 ; soit :

$$r' = \frac{\rho_0}{\xi} \left(\varphi + \frac{p}{c^2} \right) \xi$$

$$dk' = \frac{\rho_0 \varphi}{\xi} d\xi + \frac{\rho_0}{c^2} \xi^2 d\left(\frac{p}{\xi} \right)$$

Cette hypothèse équivaut à substituer dans l'expression du tenseur pentadimensionnel $\Theta_{\alpha\beta}$ les scalaires φ et p aux quantités r' et k'.

Dans ce cas, $\partial_4 \xi$ étant une donnée du problème de Cauchy sur l'hypersurface, les dérivées $\partial_4 r'$ et $\partial_4 k'$ sont remplacées simplement par les dérivées $\partial_4 \varphi$ et $\partial_4 p$, ces dernières dérivées étant déterminées par le système :

(IV - 36)
$$\begin{cases} \left(\varphi + \frac{p}{c^2} \right) v^4 \partial_4 v^4 - \left(\gamma^{44} - v^{4^2} \right) \partial_4 \left(\frac{p}{c^2} \right) = A'^4 \\ \left(\varphi + \frac{p}{c^2} \right) \partial_4 v^4 + v^4 \partial_4 \varphi = B' \end{cases}$$

A'^4 et B' ne dépendant que des données de Cauchy.

Les dérivées $\partial_4 v^4$ et $\partial_4 p$ seront déterminées à la traversée de l'hypersurface si le système est de rang 2 ; les hypersurfaces généralisant les fronts d'onde de l'hydrodynamique seront solutions de l'équation :

$$\gamma^{44} - v^{4^2} (1 - \varphi') = 0$$

où φ' désigne la dérivée partielle de φ par rapport à p.

En coordonnées quelconques cette équation s'écrit :

$$\gamma^{\lambda\mu}\,\partial_\lambda f\,\partial_\mu f = (u^\lambda \partial_\lambda f)^2 (1-\varphi')$$

$f(x^\lambda) = \text{const.}$ représentant localement l'équation de la famille des hypersurfaces excepticnnelles à la traversée desquelles peuvent avoir lieu des discontinuités du gradient de pression.

Supposons le système de coordonnées adapté à l'isométrie. L'équation précédente s'écrit simplement en termesde V_4.

$$g^{ij}\,\partial_i f\,\partial_j f = (u^i\,\partial_i f)^2 (1-\varphi')$$

$$g^{ij}\,\partial_i f\,\partial_j f \leqslant o \text{ entraîne } 1-\varphi' \leqslant o \text{ soit } \varphi' \geqslant 1$$

Un calcul classique [9] montre que la propagation des ondes s'effectue avec la vitesse V telle que :

$$V^{-2} = c^{-2}\,\varphi', \quad V \leqslant c$$

Nous retrouvons ainsi les résultats relativistes de façon simple. Il importe de remarquer que la métrique utilisée dans la variété V_5 n'influe aucunement sur les résultats ; ceci provient du fait qu'en métrique conforme les scalaires $r^{*\prime}$ et $k^{*\prime}$ déterminant le tenseur conservatif

$$\overset{*}{\Sigma}_{\alpha\beta} = r^{*\prime}\,\overset{*}{v}_\alpha\,\overset{*}{v}_\beta - k^{*\prime}\,\overset{*}{\gamma}_{\alpha\beta}$$

ont pour expressions:

$$r^{*\prime} = \varkappa_0\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\xi^{-\frac{3}{2}}, \qquad k^{*\prime} = \varkappa_0\,\frac{p}{c^2}\,\xi^{-\frac{3}{2}}$$

et contiennent une même puissance de ξ en facteur.

3. Etude des schémas pentadimensionnels.

Etudions maintenant la généralisation formelle des résultats précédents en théorie pentadimensionnelle. Considérant le système (IV - 35) en supposant, conformément à notre étude antérieure, que le tenseur $\Theta_{\alpha\beta}$ définit un schéma holonome dans V_5, soit :

$$r' = f(k') \ , \quad \partial_4 r' = f' \ \partial_4 k' \ ,$$

nous sommes amenés à affirmer que les hypersurfaces généralisant, en théorie unitaire, les fronts d'onde de l'hydrodynamique doivent être solutions de l'équation :

$$\gamma^{44} - v^{4^2} (2 - f') = 0$$

En coordonnées quelconques cette équation s'écrit :

$$\gamma^{\lambda\mu} \partial_\lambda \psi \ \partial_\mu \psi = (u^\lambda \partial_\lambda \psi)^2 (2 - f')$$

L'interprétation dans V_4 se fera exactement comme dans l'étude précédente, en coordonnées adaptées l'équation s'écrit :

$$g^{ij} \partial_i \psi \ \partial_j \psi = (u^i \partial_i \psi)^2 (2 - f') \left(1 + \frac{h^2}{F^{*2} \xi^3} \right)$$

$\psi (x^i) = \text{const.}$ désignant dans ces repères l'équation de la famille d'hypersurfaces.

La vitesse de propagation des ondes sera donnée par l'expression :

$$V^{-2} / \ c^{-2} = 1 - (2 - f') \left(1 + \frac{h^2}{F^{*2} \xi^3} \right)$$

Cette généralisation étant ainsi présentée de façon formelle, il faut maintenant considérer les résultats qui en sont les conséquences et étudier s'ils sont compatibles avec les résultats classiques.
r' et k' étant supposés fonctions d'une même quantité variable, nous pouvons écrire :

$$f' = \frac{dr'}{dk'} \ .$$

a) Considérons le schéma matière pure généralisé. Conformément aux études précédentes nous supposons que le tenseur $\Theta_{\alpha\beta}$ définit un indice $\sqrt{\xi}$ dans V_5, soit :

$$dk = r d (\text{Log} \sqrt{\xi})$$

Alors :

$$f' = 2 \ \frac{d (\text{Log } r)}{d (\text{Log } \xi)} \ .$$

Supposons que nous voulions décrire un schéma tel que la vitesse des ondes soit celle de la lumière. Alors nécessairement

$$f' = 2 \quad , \qquad d\,(\mathrm{Log}\ r) = d\,(\mathrm{Log}\ \xi\ ),$$

il vient

$$v^{\lambda}\left(\frac{\partial_{\lambda} r}{r} - \frac{\partial_{\lambda} \xi}{\xi}\right) = 0 \quad \text{soit} \quad v^{\lambda}\,\partial_{\lambda}\left(\frac{r}{\xi}\right) = 0$$

Nous en déduisons que la quantité $\frac{r}{\xi}$ doit obligatoirement être conservée le long des lignes de courant.

Appliquons ce dernier résultat à un schéma gravitationnel pur. En l'absence de charges de multiples raisons nous ont conduits à choisir

$$r = \rho_0\, \xi$$

cette expression est en parfait accord avec la condition ci-dessus : la densité massique ρ doit être considérée comme constante le long de chaque ligne de courant, ce qui caractérise la rigidité des corps solides envisagés dans la distribution matérielle.

En résumé nous venons de montrer que, dans l'hypothèse d'un indice pentadimensionnel égal à $\sqrt{\xi}$ et en l'absence de charges, il était équivalent d'affirmer l'une ou l'autre des deux propriétés suivantes ;

- la vitesse des fronts d'onde est la célérité de la lumière c.

- la densité massique ρ est conservée le long de chaque ligne de courant.

De façon plus générale considérons un schéma unitaire tel que :

$$r = \frac{k_0\, \rho\, \xi}{1 + \frac{k^3}{\xi^3}} \qquad (k \neq 0)$$

Remarquons que la condition : $f' > 2$ est bien réalisée en effet :

$$f' = 2 - 2\,\frac{d\left[\mathrm{Log}\,(1 + k^3/\xi^3)\right]}{d\,(\mathrm{Log}\,\xi)} = 2 + \frac{6\,k^3}{k^3 + \xi^3}$$

Nous en déduisons que la vitesse des ondes est donnée par la formule :

$$(\mathrm{IV}-37) \qquad v^{-2} / c^{-2} = 1 + 6\,\frac{k^3}{\xi^3}.$$

Interprétons ce résultat : nous sommes conduits à affirmer qu'en présence de matière chargée la vitesse de propagation des ondes dans les solides est nécessairement inférieure à la vitesse c de la lumière.

Les divers résultats obtenus sont ainsi parfaitement cohérents. Il faut noter qu'a priori ceci n'était pas prévisible, le scalaire k étant un terme propre à la théorie pentadimensionnelle. Il faut souligner que les hypersurfaces généralisant les fronts d'onde ne correspondent pas à une non détermination de la dérivée $\partial_4 k$, en effet

$$\partial_4 k = r\, \partial_4 (\mathrm{Log}\ \sqrt{\xi}\ )$$

est continu avec r (nota).

Ce fait n'a rien de surprenant puisque dans l'étude du schéma matière pure généralisé nous faisons abstraction de la pression ; pour cette raison il était impossible en relativité de déterminer les fronts d'onde du schéma matière pure ; il n'en est plus de même en théorie pentadimensionnelle où la structure plus complexe du tenseur $\Theta_{\alpha\beta}$ nous permet de

généraliser en métrique naturelle de V_5 un résultat classique.

b) Envisageons maintenant le schéma fluide parfait généralisé en théorie pentadimensionnelle.

Il faut évaluer $f' = \dfrac{dr'}{dk'}$

nous avons

$$dr' = \chi_0\, d\left[(\rho' + p')\,\xi\right]$$

$$dk' = \chi_0\, \rho' \frac{d\xi}{2} + \chi_0\, \xi^2\, d\left(\frac{p'}{\xi}\right)$$

ayant posé pour simplifier l'écriture :

$$\rho' = \frac{\rho}{1 + \dfrac{h^2}{F^{*2}\xi^3}} \quad , \quad p' = \frac{p}{c^2\left(1 + \dfrac{h^2}{F^{*2}\xi^3}\right)}$$

Il vient alors tous calculs faits :

$$(\mathrm{IV}-38)\quad v^{-2}/c^{-2} = 1 + 2\, \frac{d\rho' - \xi^3\, d\left(\dfrac{p'}{\xi^3}\right)}{\rho'\, d(\mathrm{Log}\,\xi) + 2\,\xi\, d\left(\dfrac{p'}{\xi}\right)} \left(1 + \frac{h^2}{F^{*2}\xi^3}\right)$$

Considérons dans le cadre du fluide parfait pentadimensionnel l'hypothèse où la propagation des ondes s'effectue avec la célérité de la lumière, il vient :

.....

(nota) Il serait possible de concevoir que $\partial_4 k$ est indéterminé sur l'hypersurface. Pour cela, il faudrait supposer que $\partial_4 \xi$ n'est plus une donnée de Cauchy.

$$d\,\rho' - \xi^3\, d\left(\frac{p'}{\xi^3}\right) = 0$$

soit

$$\rho' - p' = \int_1^{\xi} p'\, d\left(\log \frac{1}{\xi^3}\right) + \text{const.}$$

Remarquons l'intervention simple du pouvoir diélectrique ξ^3 ; la relation s'écrit en revenant aux grandeurs usuelles ρ et p.

$$\rho - \frac{p}{c^2} = \left(1 + \frac{h^2}{F^{*2}\xi^3}\right) \int_1^{\xi} \frac{p}{c^2}\, \frac{d\left(\log \frac{1}{\xi^3}\right)}{1 + \frac{h^2}{F^{*2}\xi^3}} + \text{const.}$$

le terme nouveau relatif au pouvoir diélectrique n'a d'influence qu'à l'approximation supérieure, il vient de façon approchée

(IV - 39)

$$\rho - \frac{p}{c^2} = \text{const.} + o\left(\frac{1}{c^4}\right),$$

c'est.à.dire la relation caractéristique en relativité du schéma fluide incompressible.

CHAPITRE V

Application à l'étude de certaines distributions classiques.

(A)

Généralisation du problème de Schwarzschild en théorie unitaire.

1. Généralités.

Rappelons l'énoncé du problème de Schwarzschild envisagé sous son aspect physique [4] : il s'agit de déterminer le champ de gravitation d'une sphère matérielle fixe, homogène ou composée de couches concentriques homogènes.

Ce problème de la détermination du champ de gravitation statique et à symétrie sphérique admet en relativité générale une solution célèbre constituée par l'expression exacte du dS^2 de Schwarzschild. Dans le cadre de la théorie pentadimensionnelle nous reprenons ce problème en ayant simplement pour but de mettre en évidence des solutions approchées successives des potentiels et des équations approchées du mouvement d'une masse d'épreuve infiniment petite.

Le problème essentiel consiste à déterminer de façon explicite le tenseur pentadimensionnel $\Theta_{\alpha\beta}$ qui, relié au tenseur de Ricci de la variété V_5 par les équations d'Einstein, permettra le calcul des potentiels en métrique naturelle puis en métrique conforme.

2. Conditions relatives à la détermination du tenseur $\Theta_{\alpha\beta}$.

L'étude effectuée au chapitre IV montre qu'il faut faire choix d'un tenseur de la forme :

$$\Theta_{\alpha\beta} = \Sigma\, U_\alpha U_\beta - k\, \delta_{\alpha\beta}$$

les deux scalaires r et ^{k}définissant, dans l'hypothèse où l'on néglige les pressions, un indice pentadimensionnel égal à $\sqrt{\Sigma}$.

Le scalaire r étant a priori défini par la relation :

$$r = \frac{\gamma_0 \, \xi}{1 + \frac{\kappa^2}{\xi^3}}$$ (schéma matière pure),

le scalaire k sera défini par la relation différentielle :

$$dk = r \, d\left(\text{Log } \sqrt{\xi}\right)$$

soit

$$(V - 1) \qquad dk = \frac{\gamma_0 \, \xi}{1 + \frac{\kappa^2}{\xi^3}} \cdot \frac{d\xi}{2\xi} .$$

D'autre part, désirant conserver en première approximation les calculs approchés effectués au chapitre II sous l'hypothèse d'un tenseur $\theta_{\alpha\beta}$ réduit à son premier terme, nous avions remarqué qu'il était nécessaire de choisir k de façon à ce que ce scalaire soit d'ordre $\frac{1}{c^2}$ vis à vis de r (k doit donc être d'ordre $1/c^4$).

Envisageons en troisième lieu les conditions de raccordement résultant du prolongement de l'intérieur vers l'extérieur. Soit $\sum$ l'hypersurface définissant la distribution matérielle dans V_5. $\sum$ doit nécessairement être engendrée par des trajectoires d'isométries ; nous supposerons que cette hypersurface est définie localement dans un système de coordonnées adaptées admissible par $x^4 = o$.

Les composantes $S^4{}_\lambda$ associées à la métrique extérieure sont identiquement nulles ; sur $\sum$ ces composantes ne dépendent que des potentiels, de leurs dérivées premières, et des dérivées secondes d'indice au plus 1 en x^4 ; les conditions de raccordement impliquent donc sur $\sum$ l'annulation des composantes $S^4{}_\lambda$ associées au champ intérieur :

$$(V - 2) \qquad S^4{}_\lambda = \Theta^4{}_\lambda = \nu \, v^4 v_\lambda - k \, \gamma^4{}_\lambda = o$$

soit $v^4 = o$, $k = o$

- La condition $v^4 = o$ signifie que l'hypersurface $\sum$, engendrée par les trajectoires d'isométries, doit également être engendrée par les lignes de courant pentadimensionnelles du champ intérieur.

- le scalaire k doit s'annuler sur l'hypersurface $\sum$.

Cette dernière condition ne pourrait être remplie dans le cas d'une distribution quelconque. Cependant l'hypothèse de la symétrie sphérique dans V_4 jointe au postulat de cylindricité permettra de définir une expression convenable du scalaire k .

il suffit de choisir :

(V - 3)
$$k = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\gamma_5 \, 1}{1 + \frac{k^2}{\xi^3}} \frac{d\xi}{2} ,$$

ξ_0 étant la valeur prise sur Σ par la variable ξ , ξ_0 est une constante d'après nos hypothèses.

Le scalaire k, nul sur l'hypersurface Σ , est ainsi d'ordre $1/c^4$.

3. Calcul des potentiels.

Ainsi que nous l'avons remarqué, les calculs effectués au chapitre II sont inchangés en première approximation ; ils doivent comporter une légère correction en seconde approximation étant donnée la contribution du terme k.

Le calcul en seconde approximation du potentiel conforme g^*_{44} s'obtient en évaluant la combinaison $c^3 \, (H)^{AA} + c^5 \, (H)^{44}$

soit :

$$c^3 \, (H)^{AA} + c^5 \, (H)^{44} = -3 V^2 \Delta U - 2 U \Delta U - 4 \alpha_{oo} \Delta U + 16 \pi G K.$$

ayant posé

$$k = \frac{8 \pi G}{c^4} K \left[1 + o\left(\frac{1}{c^2}\right) \right]$$

il vient

(V - 4)
$$g^*_{44} = c^2 - 2 U + \frac{2}{c^2} (U^2 - \overline{\xi}) + o \left(\frac{1}{c^4} \right)$$

avec

$$\Delta \overline{\xi} = \Delta \xi' - 8 \pi G K$$

ξ' a été défini au chapitre II paragraphe 4 par :

$$\Delta \xi' = \partial_{44} U - U \Delta U + \frac{3}{2} V^2 \Delta U - \frac{\beta_0^2}{4} (E^2 + H^2)$$

Nous obtenons ainsi une contribution nouvelle due au terme k, c'est-à-dire à la quinzième composante γ_{oo}. Cette contribution sera interprétée comme étant relative au pouvoir diélectrique du vide ξ^3. Elle disparaît en effet dans le cadre de la théorie de Kaluza-Klein (obtenue en posant ξ = const.)

Considérons un schéma gravitationnel pur, alors :

$$k = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\gamma_0 \rho}{2} d\xi \quad , \quad K = \int_{U_0}^{U} \frac{\rho \, dU}{3}$$

k apparaît ainsi comme fonction de la pression de gravitation p_G. nous avons en effet :

$$dK = \frac{1}{3} d p_G \quad , \quad d p_G = \rho \, dU.$$

Cette interprétation est naturelle. Rappelons en effet que dans le cadre de la théorie de Jordan-Thiry le pouvoir diélectrique variable du vide est lié à la pression de gravitation par la relation différentielle :

$$(V-5) \qquad \rho \, c^2 d(\xi^3) = 2 d p_G + \rho \, d\Omega .$$

Ω étant défini par $\Delta \Omega = -4\pi \frac{\mu^2}{\rho}$ ($\Omega = 0$ en l'absence de charge).

Supposons que la densité ρ puisse être considérée comme constante à l'intérieur de la distribution à symétrie sphérique, alors :

$$K = \frac{1}{3} (U - U_0) \rho$$

$$\Delta \xi = \Delta \xi' - \frac{8\pi\gamma\rho}{3} (U - U_0) = \Delta \xi' + \frac{\xi}{3} (U - U_0) \Delta U .$$

Finalement, en l'absence de champ électromagnétique :

$$(V-\epsilon) \qquad \Delta \xi = \partial_{44} U - \frac{1}{3} U \Delta U - \frac{\xi}{3} U_0 \Delta U + \frac{3}{2} V^2 \Delta U .$$

Nous remarquerons que la contribution provenant du terme k est fusionnée avec un terme classique, ceci réalisant simplement un changement de coefficient et introduisant le terme $-\frac{2}{3} U_0 \Delta U$; U_0 étant la valeur (constante) du potentiel sur l'hypersurface de séparation.

Les calculs ont été réalisés dans l'hypothèse la plus simple d'un schéma matière pure généralisé ; dans le cas où nous devrions tenir compte des efforts intérieurs, il nous faudrait choisir :

$$k = \int_{\xi_0}^{\xi} \gamma_0 \rho \frac{d\xi}{\xi^2} + \frac{\gamma_0}{2} \xi^2 \, d\left(\frac{h}{\xi}\right) \qquad (h = o)$$

Conformément à l'étude faite en relativité, le scalaire p doit s'annuler sur l'hypersurface de séparation. Calculons dans ce cas l'expression du potentiel g^*_{44} (V - 4), c'est-à-dire du terme ξ :

$$\Delta\xi = \partial_{44} U - \frac{1}{3} \Delta U - \frac{1}{2} \gamma_0 \Delta U + \frac{1}{2} \gamma_0 \Delta U - \kappa \pi G \rho \, .$$

Nous obtenons exactement la contribution due à la pression élastique en relativité.

Les potentiels conformes g^*_{ij} ne diffèrent donc des potentiels relativistes que par la seule contribution du pouvoir diélectrique du vide (modification de coefficient dans un terme de ξ). ; on constate aisément que ce changement de coefficient n'altère pas les résultats classiques obtenus en relativité. Nous retrouvons en particulier l'expression exacte de l'avance du périhélie (nota) prévue par Einstein en considérant une masse d'épreuve non chargée (infiniment petite vis à vis de la distribution sphérique homogène considérée).

Supposant l'existence de charges ($h \neq o$) , nous devons simplement tenir compte dans l'expression de $\bar{\xi}$ du terme Z (chapitre II, paragraphe 4). La trajectoire quadridimensionnelle d'une masse d'épreuve chargée sera extrémale de l'intégrale.

$$\int \sqrt{1 + \frac{h^2}{\xi^2}} \, ds^* + h \beta \varphi \, ,$$

où le pouvoir diélectrique du vide intervient de façon simple.

. . . . . .

(nota)

Ce résultat peut être obtenu directement ; on observera qu'il suffit de supposer dans l'expression signalée en (B) qu'une des deux masses est infiniment petite vis à vis de l'autre.

(B)

Le problème des deux corps en théorie unitaire.

1. Généralités

Le but de cette étude est de montrer qu'il est possible de déterminer un tenseur second membre $\Theta_{\alpha\beta}$ tel que les résultats, obtenus par Levi-Civita dans le cadre de la relativité générale, demeurent valables (moyennant certaines modifications propres à la théorie pentadimensionnelle) en théorie unitaire de Jordan-Thiry.

Dans la première partie (A) nous avons envisagé le problème de Schwarzschild en théorie unitaire; le problème des deux corps se trouve ainsi résolu dans le cas particulier où l'un des corps peut être considéré comme infiniment petit par rapport à l'autre, ce dernier présentant la symétrie sphérique.

Le problème abordé maintenant est plus général : il s'agit de décrire le mouvement relatif de deux corps, aucun des corps n'ayant des dimensions et une masse négligeables vis à vis de l'autre. Il faut ainsi rendre compte, dans le cadre de la théorie pentadimensionnelle, de deux distributions matérielles en présence ; la symétrie sphérique est détruite dans l'espace quotient, il est alors impossible de déterminer un scalaire k tel que le tenseur :

$$\Theta_{\alpha\beta} = r\, v_\alpha \quad v_\beta \quad - k \quad \gamma_{\alpha\beta}$$ puisse rendre

compte de la distribution matérielle : k doit en effet s'annuler sur les hypersurfaces de séparation ce qui s'avère impossible avec nos nouvelles hypothèses.

Les conditions de raccordement n'étant pas vérifiées de ce fait, nous devrons faire appel à un tenseur plus complexe rendant compte du caractère dissymétrique de la distribution envisagée.

Il est naturel de considérer un tenseur généralisant formellemant le tenseur normal d'impulsion-énergie du schéma fluide quelconque relativiste ; un tel tenseur présente en effet le degré de complexité immédiatement supérieur à celui envisagé précédemment.

Soit s_λ les valeurs propres de la matrice ($\Theta_{\alpha\beta}$) par rapport à la matrice ($\gamma_{\alpha\beta}$), nous obtenons les expressions des composantes $\gamma_{\alpha\beta}$ et $\Theta_{\alpha\beta}$ en fonction des s_λ et des vecteurs propres $V(\lambda)$ correspondants :

(V - 7)

$$\begin{cases} \gamma'_{\alpha\beta} = V^{(4)}_{\alpha} V^{(4)}_{\beta} - \sum_{u} V^{(u)}_{\alpha} V^{(u)}_{\beta} \\ \Theta_{\alpha\beta} = \chi_u V^{(4)}_{\alpha} V^{(4)}_{\beta} - \sum_{u} \ell_u V^{(u)}_{\alpha} V^{(u)}_{\beta} \end{cases} \qquad (u = 0, 1, 2, 3.)$$

Les vecteurs propres $V^{(\lambda)}$ définissent le repère principal au point x de la variété V_5.

Le vecteur $V^{(4)} = v$ engendre par définition les lignes de courant pentadimensionnelles.

Nous choisirons les scalaires s_λ de façon à obtenir une expression du tenseur $\Theta_{\alpha\beta}$ compatible avec celle considérée dans l'étude du problème de Schwarzschild (obtenue en supposant les valeurs propres s_u égales à - k). Nous nous limiterons au cas gravitationnel pur, nous pourrons écrire dans ce cas :

(V - 8) $$\Theta_{\alpha\beta} = \chi_0 \rho \xi v_\alpha v_\beta - \left(\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\chi_0 \rho}{2} d\xi \right) \gamma_{\alpha\beta} - \sum_u \ell_u V^{(u)}_{\alpha} V^{(u)}_{\beta}$$

Il suffit de poser :

$$s_u = - k + \ell_u \quad (\ell_u < k), \quad s_4 + k = \chi_0 \rho \xi \ , \quad k = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\chi_0 \rho}{2} d\xi \ .$$

ξ_0 étant pour le moment une valeur constante à préciser. Posons :

$$\Pi_{\alpha\beta} = \sum_u \ell_u V^{(u)}_{\alpha} V^{(u)}_{\beta}$$

ce tenseur nous permettra de faire en sorte que les conditions de raccordement soient vérifiées sur les hypersurfaces de séparation ce qui était impossible avec le tenseur simplifié ($\ell_u = 0$).

2. Examen des conditions de raccordement.

Les hypersurfaces séparant dans V_5 les distributions énergétiques (cas intérieur) et les domaines vides (cas extérieur) étant définies localement par $x^{4'} = 0$, les conditions de raccordement exigent que les composantes $\Theta^{4'}_{\lambda'}$ du tenseur mixte $\Theta^{\alpha'}_{\beta'}$ s'annulent sur ces hypersurfaces, soit :

$$\Theta^{4'}_{\lambda'} = \chi \rho v^{4'} v_{\lambda'} - k \gamma^{4'}_{\lambda'} - \Pi^{4'}_{\lambda'} = 0$$

Nous avons la relation :

exprimant l'orthogonalité du vecteur v avec les autres vecteurs propres $V^{(u)}$; nous en déduisons :

soit $v^{4'} = o$: les hypersurfaces sont engendrées par les lignes de courant du champ intérieur.

Finalement il reste à satisfaire les cinq relations :

(V-9)

Ces relations joueront le rôle de conditions aux limites dans la détermination des scalaires ℓ_u. Les quantités $k - \ell_u$ pourront être considérées comme définissant, à un coefficient près, les pressions partielles propres dues aux forces de gravitation.

Les relations (V - 9) décriront leur comportement sur les hypersurfaces de séparation. Notons que la relation $k + \Pi^{4'}_{4'} = o$, implique que les scalaires ℓ_u doivent être de l'ordre de k, c'est-à-dire de l'ordre de $1/c^4$; ceci résulte aussi de l'interprétation ci-dessus.

3. Equations de mouvement.

Exprimons que le tenseur $\Theta_{\alpha\beta}$ est conservatif, il vient ;

une multiplication contractée par v^α fournit l'équation de continuité :

(V - 10)

Compte tenu de cette dernière relation, il vient :

(V - 11)

Ces équations peuvent s'écrire en introduisant la métrique conforme de la variété V_5:

(V - 10') $$\overset{*}{D}_\alpha \left(\sqrt{2}\, \xi^{-\frac{5}{2}} \overset{*}{v}^\alpha \right) = \xi^{\frac{5}{2}} \overset{*}{v}^\beta \Omega_\beta$$

(V - 11') $$\overset{*}{v}^\alpha \overset{*}{D}_\alpha \overset{*}{v}_\beta = \left(\overset{*}{\delta}^\alpha_\beta - \overset{*}{v}^\alpha \overset{*}{v}_\beta \right) \frac{\Omega_\alpha}{\rho \xi}$$

$$\Omega_\alpha = D_\sigma \left(\sum_\mu \ell_\mu V^{(\mu)\sigma} V^{(\mu)}_\alpha \right)$$

étant les composantes d'un vecteur qu'il est inutile d'évaluer en termes de métrique conforme ; nous déterminerons en effet les scalaires ℓ_μ de façon à ce que les seconds membres de (V-10') et (V-11') soient négligeables dans les calculs effectifs réalisés en seconde approximation. La trajectoire pentadimensionnelle sera à l'approximation considérée une géodésique de la métrique conforme de V_5 ; la trajectoire quadridimensionnelle du centre de gravité d'un des corps sera, avec cette même approximation, géodésique de la métrique de Mme Hennequin.

4. Détermination des scalaires ℓ_u.

Nous calculerons les composantes Ω_α en utilisant comme système de repères ceux définis par les vecteurs propres $V^{(\lambda)}$. En un point quelconque de V_5 le repère principal est déterminé par le vecteur v tangent à la ligne de courant pentadimensionnelle (orientée $d\sigma^2 > 0$; le vecteur v est normé par $v^2 = +1$), par les trois vecteurs propres $V^{(A)}$ (A = 1, 2, 3) orientés $d\sigma^2 < 0$ et normés par $V^{(A)\,2} = -1$, enfin par un cinquième vecteur $V^{(0)}$ orthogonal aux quatre précédents, normé par $V^{(0)2} = -1$ et tangent à la trajectoire d'isométries passant par le point considéré puisque le schéma est non chargé.

Ce repère est donc adapté à l'hypothèse de cylindricité, les calculs seront de ce fait simplifiés : soient $\gamma_{\alpha\beta\lambda}$ les coefficients de rotation, nous obtenons :

$$\Omega_\alpha = D_\sigma \left(\sum_\mu \ell_\mu V^{(\mu)}_\alpha V^{(\mu)\sigma} \right) = \sum_\mu V^{(\mu)}_\alpha V^{(\mu)\sigma} \partial_\sigma \ell_\mu + \sum_\mu \ell_\mu V^{(\mu)\sigma} D_\sigma V^{(\mu)}_\alpha \ldots$$
$$\ldots + \sum_{\mu\nu} \ell_\mu V^{(\mu)}_\nu D_\alpha V^{(\mu)\nu}$$

Nous réaliserons les calculs en supposant que V_5 soit munie d'une métrique de signature elliptique, pour cela nous sommes amenés à poser :

$$d\sigma = \sum_\alpha \omega^\alpha V^{(\alpha)} = \sum_\alpha \varpi^{\prime\alpha} V^{\prime(\alpha)}$$

$$\varpi^4 = \varpi^{\prime 4}, \quad \varpi^\mu = i\, \varpi^{\prime\mu}, \quad V^{(4)} = V^{\prime(4)}, \quad V^{(\mu)} = -i\, V^{\prime(\mu)}$$

$$d\sigma^2 = \sum_\alpha \varpi^{\prime\alpha 2}, \qquad V^{\prime(\alpha)\,2} = +1$$

Nous obtenons :

$$D_\alpha V'^{(u)\alpha} = -\gamma_{\alpha\beta\alpha} V'^{(u)\beta} = \gamma_{\beta\alpha\alpha} V'^{(u)\beta}$$
$$D_\sigma V'^{(u)}_\alpha = -\gamma_{\alpha\beta\sigma} V'^{(u)\beta}$$

La composante Ω_0 s'écrit :

$$\Omega_0 = -\partial_0 \ell_0 - \ell_0 \gamma_{0\sigma\sigma} + \sum_u \ell_u \gamma_{0uu}$$

chacun des termes est nul ; en effet en l'absence de charges les seuls coefficients de rotation non nuls sont γ_{i00} et γ_{ijk} ; de plus le caractère adapté des coordonnées doit entraîner $\partial_0 \ell_0 = 0$.

La composante Ω_0 est donc identiquement nulle. La composante Ω_4 s'exprime simplement ; en effet nous observons que $V^{(u)}_4 = 0$ quel que soit u = 0, 1, 2, 3, il vient :

$$\Omega_4 = \sum_u \ell_u \gamma_{4uu} .$$

Les trois composantes Ω_A sont définies par l'expression :

$$\Omega_A = -\partial_A \ell_A - \sum_\sigma \ell_A \gamma_{A\sigma\sigma} + \sum_u \ell_u \gamma_{Auu} ,$$

les sommations n'étant effectuées que par rapport aux lettres u et σ, non par rapport à la lettre A.

Calculons les développements limités des coefficients de rotation non nuls ; nous utilisons les formules classiques :

$$d\,\varpi'_\alpha = \frac{1}{2} C_{\lambda\mu\alpha}\, \varpi'_\lambda \wedge \varpi'_\mu$$
$$\gamma_{\alpha\beta\lambda} = \frac{1}{2}\left(C_{\alpha\beta\lambda} + C_{\alpha\lambda\beta} - C_{\beta\lambda\alpha} \right)$$

Les formes de Pfaff ϖ'_α ont pour développements :

$$\varpi'_0 = i\left(1 + \frac{2}{c^2} U\right) dx^0 + o\left(\frac{1}{c^4}\right)$$

$$\varpi'_A = i\left(1 + \frac{2}{3c^2} U\right) dx^A + o\left(\frac{1}{c^4}\right)$$

$$\varpi'_4 = \left(c - \frac{4}{3c} U\right) dx^4 + o\left(\frac{1}{c^3}\right)$$

Prenons les différentielles des formes, il vient :

$$d\varpi'_0 = -\frac{2}{3c^2}\, i\, \partial_B U\ \varpi'_A \wedge \varpi'_0 + \frac{2}{3c^3}\, \partial_4 U\ \varpi'_4 \wedge \varpi'_0 + O\left(\frac{1}{c^4}\right)$$

$$d\varpi'_A = -\frac{2}{3c^2}\, i\, \partial_B U\ \varpi'_B \wedge \varpi'_A + \frac{2}{3c^3}\, \partial_4 U\ \varpi'_4 \wedge \varpi'_A + O\left(\frac{1}{c^4}\right)$$

$$d\varpi'_4 = +\frac{4}{3c^2}\, i\, \partial_A U\ \varpi'_4 \wedge \varpi'_0 + O\left(\frac{1}{c^3}\right)$$

Nous en déduisons les développements des coefficients de rotation :

$$\gamma_{AMM} = -\frac{2}{3c^2}\, i\, \partial_A U + O\left(\frac{1}{c^4}\right),$$

$$\gamma_{4MM} = +\frac{2}{3c^3}\, \partial_4 U + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \quad \gamma_{A44} = \frac{4}{3c^2}\, i\, \partial_A U + O\left(\frac{1}{c^4}\right)$$

Notre but étant d'effacer dans les équations de mouvement la contribution du vecteur Ω, nous annulons les parties principales des développements des composantes de ce vecteur. Il vient en particulier la relation :

$$\ell_0 + \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = 0$$

Nous devons alors considérer Ω_4 comme étant de l'ordre de $1/c^9$.

Cette relation nous permet d'exprimer la partie principale de Ω_4 en fonction du seul scalaire ℓ_A, soit :

$$\Omega_A = \partial_A \ell_A + \frac{4}{3c^2}\, \ell_4\, \partial_A U + O\left(\frac{1}{c^5}\right)$$

les dérivées partielles étant relatives à la variable x^A.

Nous devrons donc choisir les scalaires ℓ_A définis par :

$$\ell_A = \alpha_A \left[1 - \frac{4}{3c^2} U + O\left(\frac{1}{c^4}\right)\right]$$

les fonctions α_A étant respectivement indépendantes de la variable x^A (A = 1, 2, 3).

Les composantes Ω_A sont alors d'ordre $1/c^8$, le vecteur Ω devient de ce fait négligeable dans une seconde approximation des équations de mouvement.

Pour retrouver les résultats classiques il faut montrer que le calcul en seconde approximation du potentiel g^*_{44} n'est pas altéré par le tenseur $T_{\alpha\beta}$.

Rappelons que ce calcul fait intervenir essentiellement la combinaison $c^3 \left(4\right)^{AA} + c^5 \left(4\right)^{44}$ (voir chapitre II), cette expression étant évaluée dans un système de coordonnées adaptées et isothermes, système voisin de celui constitué par un repère principal.

Il faut donc évaluer la somme correspondante $c^3 \Pi^{AA} + c^5 \Pi^{44}$ qui doit être nulle en première approximation ; nous pouvons calculer les composantes contravariantes des vecteurs propres dans le système de coordonnées adaptées isothermes en nous référant aux formules du changement de repères, il vient :

$$c^2 \Pi^{44} = O\left(\frac{1}{c^6}\right)$$

$$\Pi^{AA} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \ell_{\alpha} V^{(\alpha)A} V^{(\alpha)A} = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + o\left(\frac{1}{c^6}\right).$$

La contribution est donc égale à la somme $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3$.

Considérons la relation $\ell_o + \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = o$ obtenue précédemment et remarquons que le scalaire ℓ_o est resté jusqu'ici indéterminé. Il suffit de prendre :

$$\ell_o = o$$

pour que le tenseur correctif $\Pi_{\alpha\beta}$ n'intervienne pas dans le calcul en seconde approximation du potentiel g^*_{44}.

5. Le problème des deux corps.

Nous avons ainsi montré qu'il est possible, dans le cadre de la théorie de Jordan-Thiry, de déterminer un tenseur pentadimensionnel de la forme :

$$\Theta_{\alpha\beta} = \Pi_{\alpha\beta} \int_{\xi_o}^{\xi} \frac{\gamma_o \Gamma}{2} d\xi \Big) \gamma_{\alpha\beta} - \Sigma_A \ell_A V_{\alpha}^{(A)} V_{\beta}^{(A)} .$$

Ce tenseur est compatible avec la distribution complexe de deux masses de dimensions non négligeables ; il permet de rendre compte du raccordement des champs extérieur et intérieurs sur les hypersurfaces de séparation. Ce tenseur généralise simplement le tenseur utilisé pour étudier le problème de Schwarzschild en théorie pentadimensionnelle (cas non chargé), il en diffère par le tenseur correctif $\Pi_{\alpha\beta}$ destiné à rendre compte de la répartition des efforts dus à la pression de gravitation suivant les directions principales en un point intérieur à l'un des solides. Rappelons à nouveau que les équations de mouvement, ainsi que le potentiel g^*_{44} ne sont pas altérés en seconde approximation par cette précision apportée dans l'évaluation du tenseur énergétique.

Un détail cependant reste à préciser : la borne inférieure ξ_o de l'intégrale définissant le scalaire k. A priori cette valeur constante est indéterminée, k étant défini à une constante additive près ; nous pourrons lever cette indétermination en invoquant une propriété de continuité évidente :

supposons que les dimensions d'un des deux corps considérés tendent vers zéro ainsi que sa masse et admettons que le second corps possède la symétrie sphérique, nous devons dans ce cas retrouver exactement le tenseur du problème de Schwarzschild.

Les scalaires ℓ_A doivent tendre vers zéro; soient U_1 et U_2 les potentiels créés respectivement par les corps (1) et (2), le corps (2) disparaissant, le potentiel U_2 tend vers zéro.

La valeur constante de ξ_0 est alors définie par :

$$\xi_0 = \xi\left[U_{1(0)}\right]$$

U_1 (o) étant la valeur du potentiel dû au corps (1) sur sa surface de séparation ($U_{1(o)}$ demeure constant au cours du mouvement puisque le corps est supposé indéformable).

Dans l'étude du problème des deux corps proprement dit, nous devrons donc choisir :

$$\mathcal{K} = \int_{\xi\left[U_{A(0)}\right]}^{\xi\left[U_1+U_2\right]} \frac{\mu_0 \rho}{\chi}\, d\xi \quad ,$$

A = 1, 2 suivant que l'on considère l'intérieur du corps (1) ou du corps (2).

La trajectoire pentadimensionnelle d'un élément matériel est en seconde approximation géodésique de la métrique conforme de la variété V_5, le principe de descente conduit à une trajectoire quadridimensionnelle géodésique, avec cette même approximation, de la métrique de Mme Hennequin.

Le tenseur $\Pi_{\alpha\beta}$ n'intervenant pas dans le calcul du potentiel $\overset{*}{g}_{44}$, nous écrivons simplement :

$$\overset{*}{g}_{44} = c^2 - 2U + \frac{2}{c^2}\left(U^2 - \bar{\xi}\right) + o\left(\frac{1}{c^4}\right)$$

avec

$$\Delta\bar{\xi} = \partial_{44} U - \frac{1}{3} U \Delta U - \frac{2}{3} U_0 \Delta U + \frac{3}{2} V^2 \Delta U .$$

Les calculs effectués par Levi-Civita [6] sont donc valables compte tenu de la modification de coefficient signalée en (A) ; on obtient ainsi le développement suivant de la fonction lagrangienne :

$$\mathcal{L} = \mathcal{H} + \frac{1}{c^2}\mathcal{D} + o\left(\frac{1}{c^4}\right)$$

avec

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} V^2 + U \qquad \text{(fonction de Lagrange classique)}$$

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{2} \mathcal{H}^2 - U' + \xi + \mu V^2 - \Sigma_A \mu \alpha_{\mu A} V^\mu .$$

Nous ne reprendrons pas en détailsles calculs de Levi-Civita, nous énonçons simplement les résultats dus à la modification signalée du coefficient :

- Le principe "d'effacement" n'est pas altéré, autrement dit l'artifice consistant à modifier légèrement les masses des corps (modification d'ordre $1/c^2$) permet de mettre en évidence le fait que la trajectoire du centre de gravité d'un corps ne dépend pas, à l'approximation considérée, du champ intérieur dû à ce même corps. Cette propriété traduit en théorie unitaire la validité approchée du principe de réaction classique.

- L'évaluation plus précise du déplacement du périhérie est légèrement modifiée, nous obtenons en effet :

$$\sigma = \sigma_E \left[1 + \frac{5}{9} \frac{M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^2} \right]$$

σ_E étant le déplacement classique prévu en supposant le corps gravitant infiniment petit.

M_1 et M_2 sont les masses respectives des corps (planètes). Nous obtenons le coefficient 5/9 au lieu du coefficient 1/3 trouvé en relativité, la différence est due au terme k (pouvoir diélectrique). Nous en déduisons que la correction de l'avance ne peut excéder 5/36 (dans le cas de masses égales) de la valeur prévue par la solution du problème de Schwarzschild. Remarquons que cette modification est sans influence sensible sur l'avance du périhélie de Mercure, les masses en présence étant trop disproportionnées.

TABLE DES MATIERES.

pages.

Introduction 1

Notations et symboles utilisés. 8

CHAPITRE I. Rappels concernant la théorie pentadimensionnelle de Jordan-Thiry.

1. La variété riemannienne V_5^n et la variété quotient V_4. 9
2. Le principe de descente appliqué à la variété riemannienne V_5 11
3. Equations de champ. Conséquences des identités de conservation. 13
4. Interprétation des équations de champ dans la variété quotient V_4. 15

CHAPITRE II. Etude des approximations en théorie pentadimensionnelle de Jordan-Thiry.

(A)

Rappel des calculs en première approximation de Mme Hennequin.

1. Coordonnées isothermes pentadimensionnelles. 21
2. Hypothèses relatives au champ unitaire. 23
3. Calculs en première approximation. 23

(B)

Calculs en seconde approximation.

1. Généralités. 30
2. Expression du potentiel g^*_{44}. 30
3. Calcul des premiers membres des équations. 32
4. Calcul des seconds membres des équations. 38

CHAPITRE III. Etude critique des équations de mouvement.

1. Etude des équations de mouvement en première approximation. 44
2. Analyse des difficultés. 45

CHAPITRE IV. Généralisation des schémas matière pure et fluide parfait en théorie unitaire pentadimensionnelle.

(A)

Schéma matière pure généralisé.

1. Généralités. 49
2. Schéma holonome dans la variété V_5 49
3. Détermination d'un tenseur $\theta_{\alpha\beta}$ tel que le principe des géodésiques soit vérifié en métrique conforme de V_4. 51
4. Conséquences du choix de l'indice pentadimensionnel. 54
5. Etude, en métrique conforme de V_5, des conditions de conservation relatives au tenseur $\theta_{\alpha\beta}$. Equations de mouvement..... 57
6. Les équations tensorielles en repères orthonormés. 60

(B)

Schéma fluide parfait généralisé.

1. Généralisation du schéma fluide parfait non chargé. 63
2. Extension au cas du schéma fluide parfait chargé. 65
3. Retour à la métrique naturelle. 66
4. Etude des densités énergétiques de charge et de masse..... 69
5. Les équations de conservation en métrique conforme de V_4..... 71

(C)

Le problème de Cauchy dans le cadre d'un schéma intérieur en théorie pentadimensionnelle. Les fronts d'onde, vitesse de propagation des ondes.

1. Généralités. 75
2. Schéma fluide parfait non chargé (cas classique). 76
3. Etude des schémas pentadimensionnels. 77

CHAPITRE V. Application à l'étude de certaines distributions classiques.

(A)

Généralisation du problème de Schwarzschild en théorie unitaire.

1. Généralités. 82
2. Conditions relatives à la détermination du tenseur $G_{\alpha\beta}$ 82
3. Calcul des potentiels. 84

(B)

Le problème des deux corps en théorie unitaire.

1. Généralités. 87
2. Examen des conditions de raccordement. 88
3. Equations de mouvement. 89
4. Détermination des scalaires ℓ_u. 90
5. Le problème des deux corps. 93

BIBLIOGRAPHIE. 99

BIBLIOGRAPHIE

1 CARTAN (Elie). - Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann. Gauthier-Villars, Paris, 1946.

2 EINSTEIN (Albert). - Les fondements de la théorie de la relativité générale. Hermann, Paris, 1933 (trad. Maurice Solovine).

3 EINSTEIN (Albert). - Quatre conférences sur la théorie de la relativité faites à l'université de Princeton. Gauthier-Villars, Paris, 1925 (trad. Maurice Solovine).

4 HAAG (Jules). - Le problème de Schwarzschild. Gauthier-Villars, Paris, 1950 (Mém. Sc. math. XLVI).

5 HENNEQUIN (Françoise). - Etude mathématique des approximations en relativité générale et en théorie unitaire de Jordan-Thiry, Bull. scient. Commiss. Trav. hist. et scient., t. I, 1956, 2ème partie : Mathématiques, p. 73-154. - Paris, Gauthier-Villars, 1957 (Thèse Sc. math. Paris, 1956).

6 LEVI-CIVITA (Tullio). - Le problème des n corps en relativité générale. - Gauthier-Villars, Paris, 1950 (Mém. Sc. math., CXVI.)

7 LICHNEROWICZ (André). - Algèbre linéaire. Masson, Paris, 1947.

8 LICHNEROWICZ (André). - Eléments de calcul tensoriel. A. Colin, Paris, 1950.

9 LICHNEROWICZ (André). - Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme. -Masson, Paris, 1955 (Collection d'Ouvrages de Mathématiques à l'usage des Physiciens).

10 LICHNEROWICZ (André) . - Problèmes globaux en mécanique relativiste. Hermann, Paris, 1939.

11 PIGEAUD (Pierre). - Comptes rendus Ac. Sc. Paris - t 252, p. 1731-1733 - t. 252, p. 3005-3007 - t. 253, p. 1912-1914.

12 THIRY (Yves). - Etude mathématique des équations d'une théorie unitaire à quinze variables de champ, J. Math. pures et appl. , Série 9, t. 30, 1951, p. 275-396 (Thèse Sc. math. Paris, 1950).

13 THIRY (Yves). - Sur une généralisation du problème de Schwarzschild à une théorie unitaire. Comptes rendus Ac. Sc. Paris, t. 235, p. 1480-1482.

14 VALLEE (Robert). - Sur l'hydrodynamique en théorie de Jordan-Thiry. Comptes rendus Ac. Sc. Paris, t. 248, p. 1779-1781.

15 VALLEE (Robert). - Sur la représentation relativiste des fluides parfaits chargés. Thèse, Paris, 1962.

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

" CAPACITABILITÉ - THÉORÈMES FONDAMENTAUX "

Vu et approuvé :

Paris, le 26 Avril 1962

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Marc ZAMANSKY

Vu

et Permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie

de Paris,

Jean ROCHE